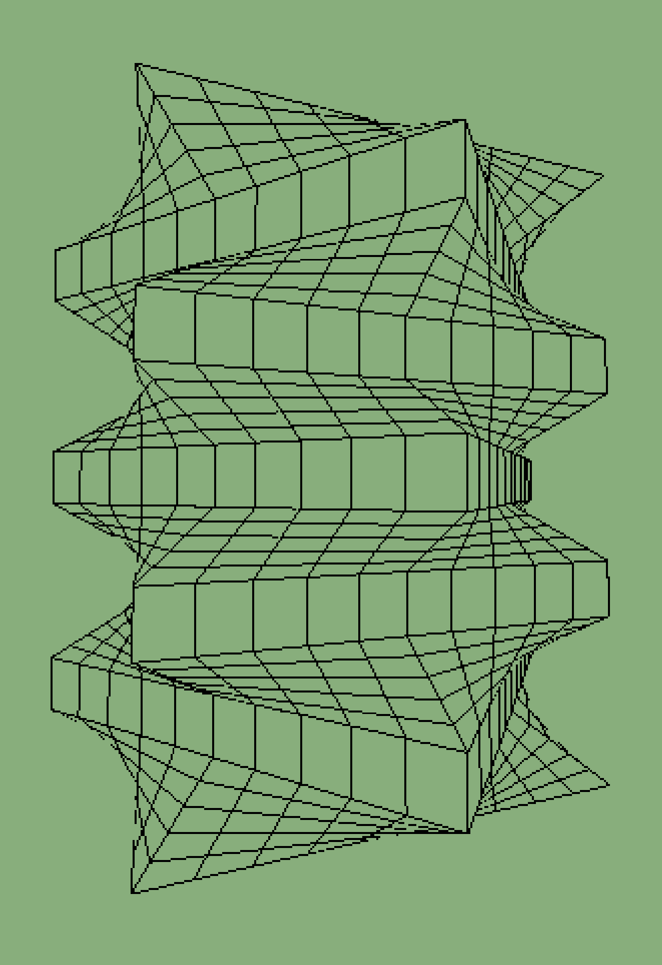
EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO
Y SUS IMÁGENES ARQUITECTÓNICAS

por

Ramón J. Zoido



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-05

EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Y SUS IMÁGENES ARQUITECTÓNICAS

por

RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-05

C U A D E R N O S
D E L   I N S T I T U T O
J U A N   D E   H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

El paraboloide hiperbólico y sus imágenes arquitectónicas.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 417.01 / 3-53-05
ISBN-13: 978-84-9728-484-4
Depósito Legal: M-31811-2013

En uno de los primeros cursos de Geometría Diferencial impartidos en la ETSAM bajo el nombre de "Curvas y Superficies" propuse a los alumnos la elección de una de entre seis superficies regladas notables para realizar una clase monográfica y profundizar en las características de la superficie elegida. Acompañaban al paraboloide hiperbólico superficies tan sugerentes como la superficie "del envase tetraédrico" o la "de Guimard" además de la cuña "de Wallis", el helicoide recto y el hiperboloide alabeado. El resultado de la encuesta me resultó sorprendente porque el paraboloide hiperbólico fue la superficie seleccionada por una amplia y contundente mayoría. Yo tenía la impresión de que esta superficie era ya bastante bien conocida por los estudiantes de arquitectura por su extensa presencia en el campo del diseño pero más tarde he llegado a la conclusión de que los conocimientos que se tienen de esta superficie son, en general, fragmentarios y un tanto dispersos y que existe el interés comprensible de agruparlos para un mejor conocimiento global. Uno de los objetivos de este trabajo pretende cubrir al menos una parte de esa comprensión global, aunque se es consciente de que quedan todavía otras muchas maneras de abordar esta cuestión y de profundizar en algunas de sus otras características. El texto está también orientado a mostrar algunos ejemplos representativos de las posibilidades creativas y constructivas de la superficie.

La lectura requiere manejar holgadamente las parametrizaciones propias de las superficies regladas y conocer el uso de los coeficientes de las dos primeras formas cuadráticas y otras cuestiones relacionadas con estos últimos como la determinación de las líneas asintóticas etc.

Como en otros textos publicados anteriormente se ha dado importancia a las representaciones gráficas que son las que nos permiten comprender las ideas expuestas. Finalmente, reiterar que es inevitable la aparición de erratas o imprecisiones que se irán corrigiendo en revisiones posteriores.

Ramón Zoido
Noviembre 2013

EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO
Y SUS IMÁGENES ARQUITECTÓNICAS

§ 1.- Una superficie de traslación.

1.1.- El paraboloide hiperbólico generado como una superficie de traslación.

Nos interesamos por la superficie generada por traslación de una parábola sobre otra con concavidades opuestas (figura 1 a) situadas en planos distintos y no paralelos –en general, oblicuos– (figura 1 b). Podemos considerar sin ningún tipo de restricción que ambas parábolas tienen un vértice común que podemos situar en el origen de coordenadas y se encuentran arbitrariamente en planos $\mathbf{x = 0}$ e $\mathbf{y = \alpha\, x}$ (figura 1 c).

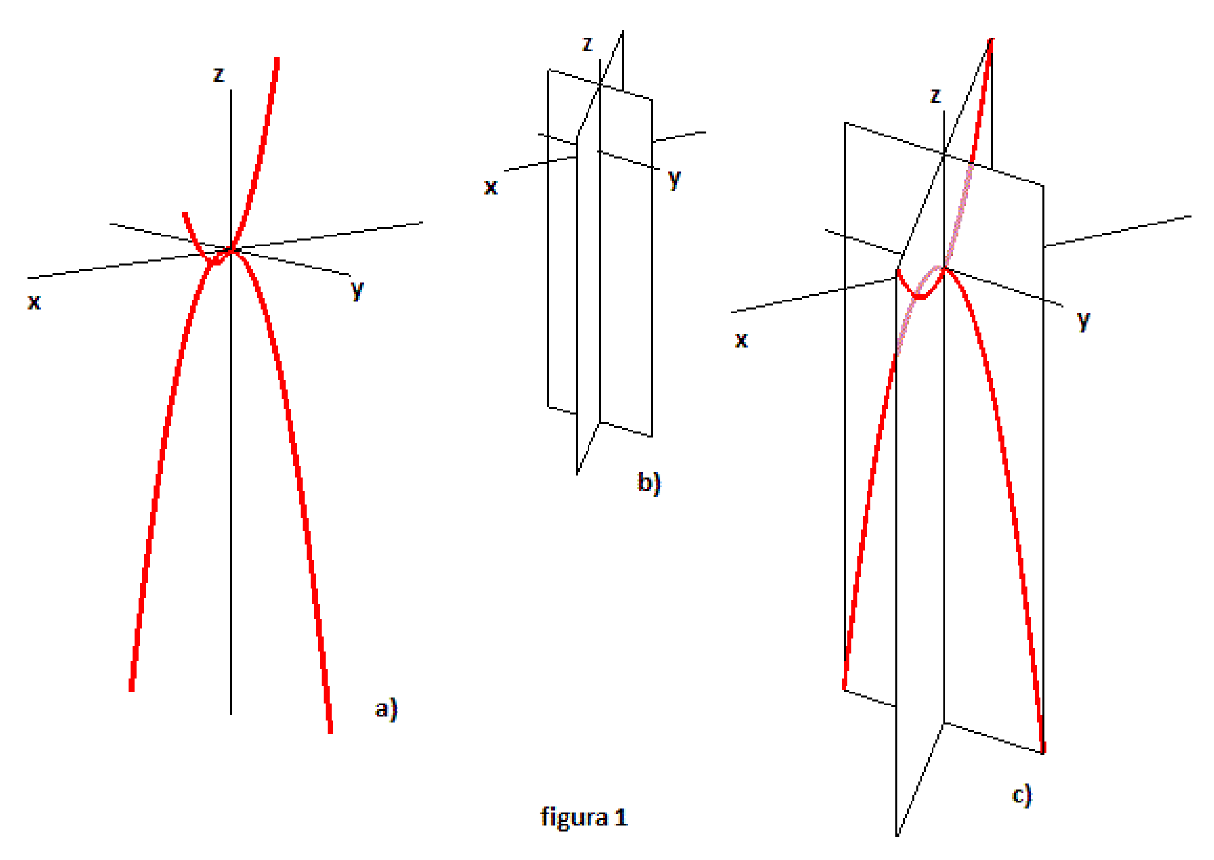


figura 1

Tal superficie puede generarse por la traslación de la curva $\mathbf{z = a^2\, x^2,\ y = \alpha\, x}$ sobre la $\mathbf{z = -\, b^2\, y^2,\ x = 0}$, con lo que una de sus formulaciones paramétricas será:

$$\underline{\mathbf{r}}\ \mathbf{(x, y) = \{ x, \alpha\, x, a^2\, x^2 \} + \{ 0, y, -b^2\, y^2 \} = \{ x, \alpha\, x + y, a^2\, x^2 - b^2\, y^2 \}}$$

que puede escribirse utilizando una notación genérica con parámetros "**u**" **y** "**v**" en la forna:

$$\underline{\mathbf{r}}\ \mathbf{(u, v) = \{ u, v, a^2\, u^2 - b^2\, (v - \alpha\, u)^2 \}}$$

siendo $\mathbf{u = x}$, $\mathbf{v = \alpha\, x + y}$. Consideramos en todo caso un fragmento de esta superficie delimitada por un cierto intervalo **U** de los parámetros **(u, v)** –figura 2–.

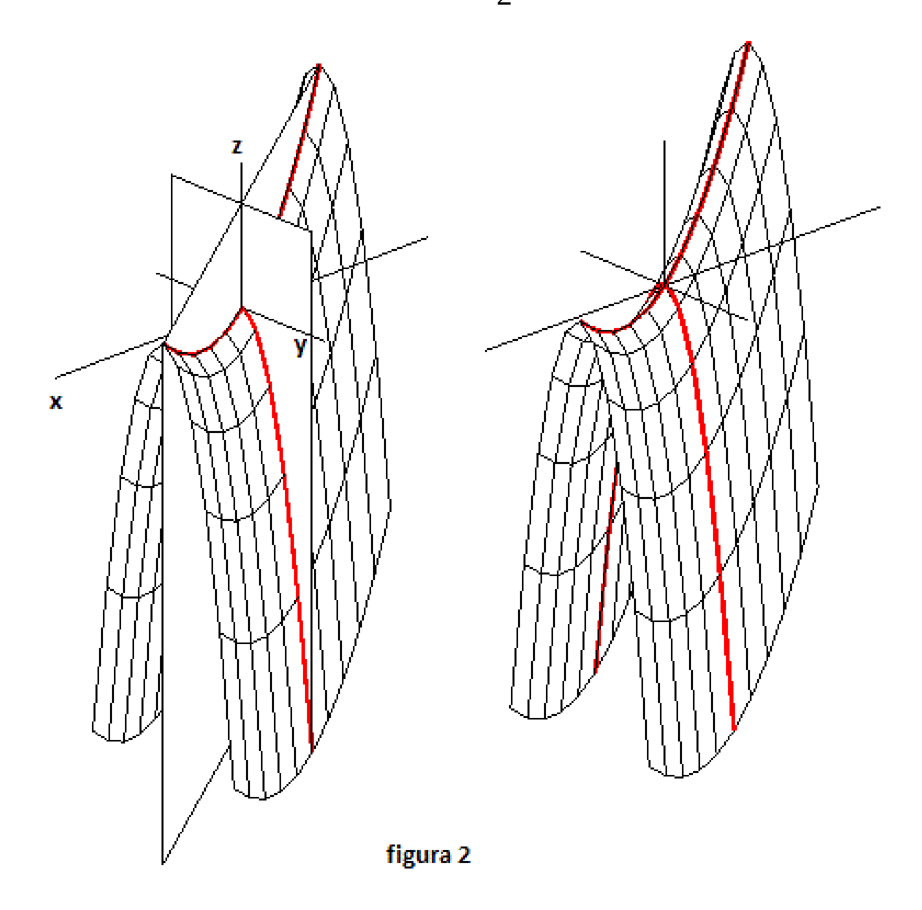


figura 2

En esta superficie se verifica:

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{u}} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{v}} = \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}} = \{-2\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{u} - 2\,\mathbf{b}^2\,\alpha\,(\mathbf{v} - \alpha\,\mathbf{u}),\, 2\,\mathbf{b}^2\,(\mathbf{v} - \alpha\,\mathbf{u}),\, 1\}$$

y comprobamos que $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$ para cualquier par de valores **u, v** pertenecientes a **U** con lo que esta superficie carece de puntos singulares. Además, siendo

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{u}} = \{0, 0, 2\,\mathbf{a}^2 - 2\,\mathbf{b}^2\,\alpha^2\},$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uv}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{u}} = \{0, 0, 2\,\mathbf{b}^2\,\alpha\},$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{vv}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{v}} = \{0, 0, -2\,\mathbf{b}^2\},$$

obtenemos los coeficientes:

$$\mathbf{e^*} = (\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}},\, \mathbf{r}_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}_{\mathbf{v}}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\,\mathbf{a}^2 \\ 1 & 0 & 2\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{u} + 2\mathbf{b}^2\,\alpha\,(\mathbf{v} - \alpha\,\mathbf{u}) \\ 0 & 1 & -2\mathbf{b}^2\,(\mathbf{v} - \alpha\,\mathbf{u}) \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{a}^2 - 2\,\mathbf{b}^2\,\alpha^2,$$

$$\mathbf{f^*} = (\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uv}},\, \mathbf{r}_{\mathbf{u}}, \mathbf{r}_{\mathbf{v}}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\,\mathbf{b}^2\alpha \\ 1 & 0 & 2\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{u} + 2\mathbf{b}^2\,\alpha\,(\mathbf{v} - \alpha\,\mathbf{u}) \\ 0 & 1 & -2\mathbf{b}^2\,(\mathbf{v} - \alpha\,\mathbf{u}) \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{b2}\,\alpha\mathbf{0}\,,$$

$$\mathbf{g^* = (\underline{r}_{vv},\ r_u, r_v) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2\,b^2 \\ 1 & 0 & 2\,a^2\,u + 2b^2\,\alpha\,(v-\alpha\,u) \\ 0 & 1 & -2b^2\,(v-\alpha\,u) \end{vmatrix} = -\,2\,b^2},$$

y la función de forma $\mathbf{h^* = e^*\ g^* - f^{*2} = -\ 4\ a^2\ b^2 < 0}$.Todos sus puntos resultan ser hiperbólicos. La superficie generada de esta forma y con estas características es denominada un paraboloide hiperbólico.

1.2.- Trasformación de coordenadas. Planos directores.

La forma de Monge $\mathbf{z = a^2\ x^2 - b^2\ (y - \alpha\ x)^2}$ permite considerar la parametrización trivial:

$$\mathbf{(\ x,\ y,\ a^2\ x^2 - b^2\ (y - \alpha\ x)^2\ )}$$

cuyas líneas coordenadas –representadas en la figura 3– son las parábolas

$\mathbf{z = a^2\ c^2 - b^2\ (y - \alpha\ c)^2}$ en planos $\mathbf{x = c}$ = constante –figura 3 a–
$\mathbf{z = a^2\ x^2 - b^2\ (c - \alpha\ x)^2}$ en planos $\mathbf{y = c}$ = constante –figura 3 b–

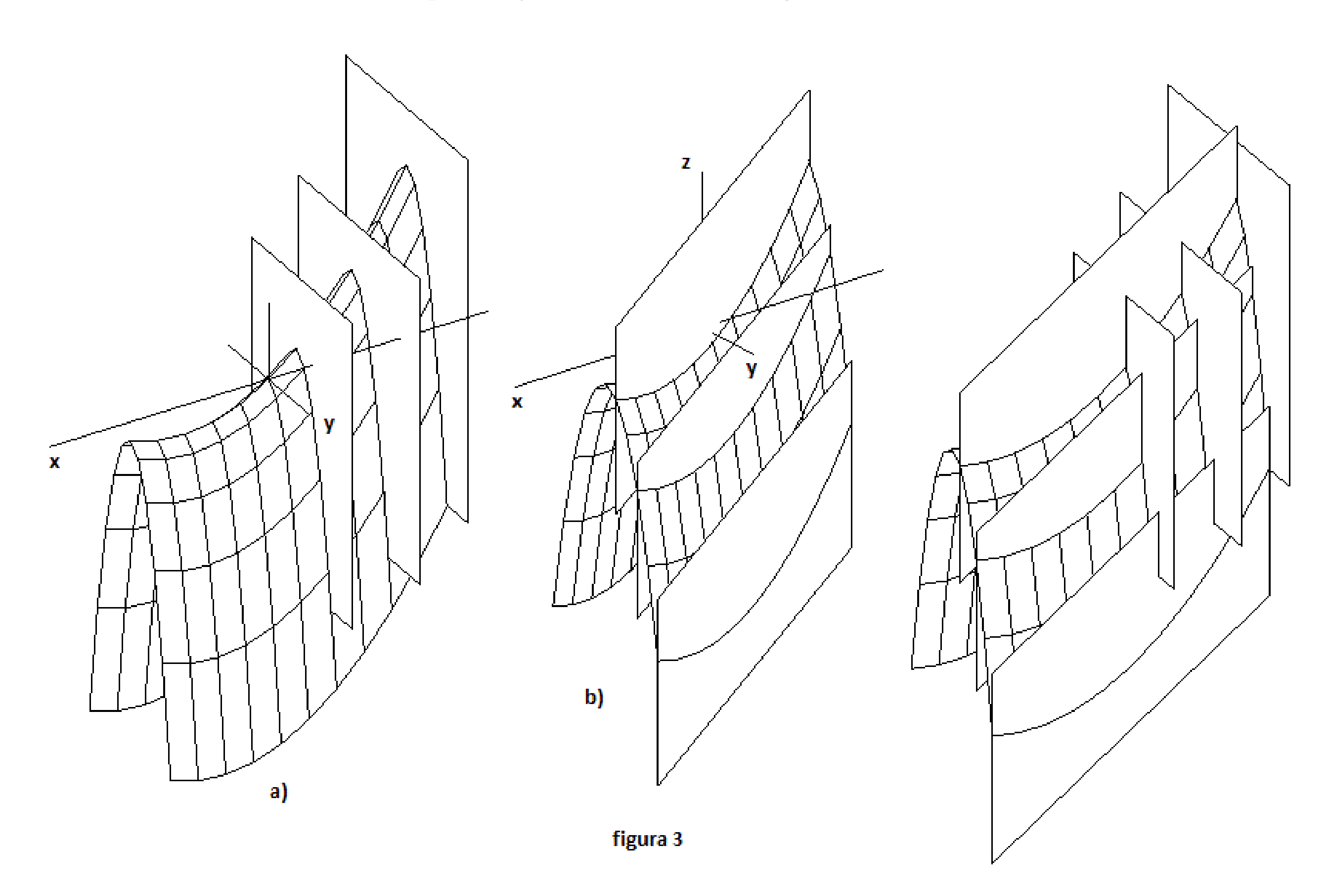


figura 3

La superficie puede escribirse: $\mathbf{z = (a\ x + b\ (y - \alpha\ x)\ )\ (a\ x - b\ (y - \alpha\ x)\ )}$. Teniendo en cuenta los cambios de coordenadas implícitos en las ecuaciones:

$$a\,x + b\,(y - \alpha\,x) = x' \qquad a\,x - b\,(y - \alpha\,x) = y'$$

o sea:

$$x = \frac{x'+y'}{2\,a} \qquad y = \frac{x'-y'}{2\,a} + \alpha\,\frac{x'+y'}{2\,a}$$

nos permiten escribir la parametrización:

$$\left(\frac{1}{2\,a}(x'+y'),\ \frac{x'-y'}{2\,a} + \alpha\,\frac{x'+y'}{2\,a},\ x'\,y'\right)$$

o bien, si se quiere, con el cambio de escala adicional:

$$x'' = \frac{x'}{2\,a\,b} \qquad y'' = \frac{y'}{2\,a\,b},$$

obtenemos la parametrización:

$$(\,b\,(x''+y''),\ a\,(x''-y'') + b\,\alpha\,(x''+y''),\ 4\,a^2\,b^2\,x''\,y''\,)$$

cuya representación gráfica es la de la figura 4 a en la que se muestra como queda reconstruida la misma superficie con otras familias de líneas coordenadas. En la figura 4 b se comparan las líneas coordenadas de esta parametrización con la anterior descrita en **1.1** y en la figura 4 c se muestra la imagen de la nueva representación paramétrica resaltando las parábolas que generaron la superficie inicialmente por traslación.

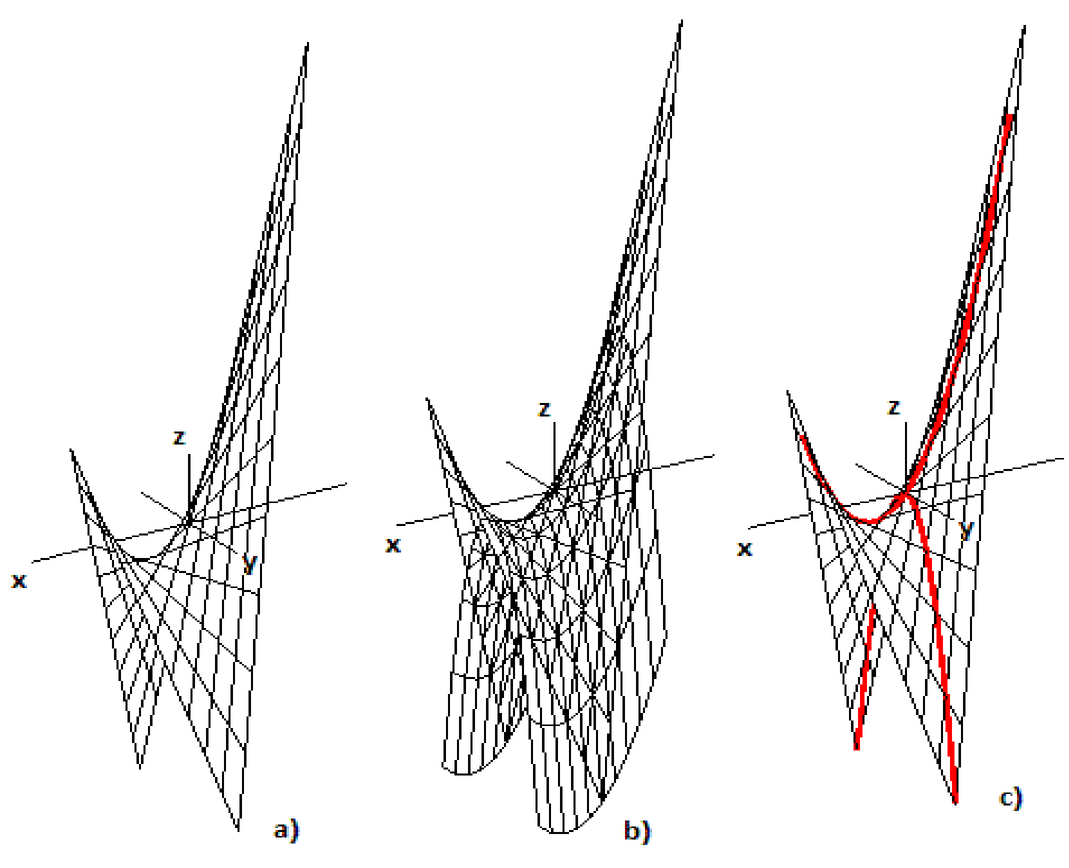


figura 4

Una de las familias de líneas coordenadas de la superficie en esta última parametrización son ahora las rectas:

$$\mathbf{(b\ (c + y''),\ a\ (c - y'') + b\ \alpha\ (c + y''),\ 4\ a^2\ b^2\ c\ y'') = (b\ c,\ (b\ \alpha + a)\ c,\ 0) + y''\ \{b,\ b\ \alpha - a,\ 4\ a^2\ b^2\ c\}}$$

con **c** = constante, que se encuentran situadas en planos $\mathbf{y = (\alpha - \frac{a}{b})\ x + 2\ a\ c}$.

La otra familia estará constituida por las rectas:

$$\mathbf{(b\ (x'' + c),\ a\ (x'' - c) + b\ \alpha\ (x'' + c),\ 4\ a^2\ b^2\ c\ x'') = (b\ c,\ (b\ \alpha - a)\ c,\ 0) + x''\ \{b,\ b\ \alpha - a,\ 4\ a^2\ b^2\ c\}}$$

con **c** = constante, que se encuentran situadas en planos $\mathbf{y = (\alpha + \frac{a}{b})\ x - 2\ a\ c}$.

En las figuras 5 a y 5 b podemos ver algunas de estas dos familias de rectas en sus planos y en la figura 6 a y 6 b se muestran estas mismas rectas como intersección de los planos citados con la superficie descrita en su parametrización inicial y, finalmente, en la figura 7 podemos visualizar esas rectas conjuntamente sobre la superficie descrita en ambas parametrizaciones.

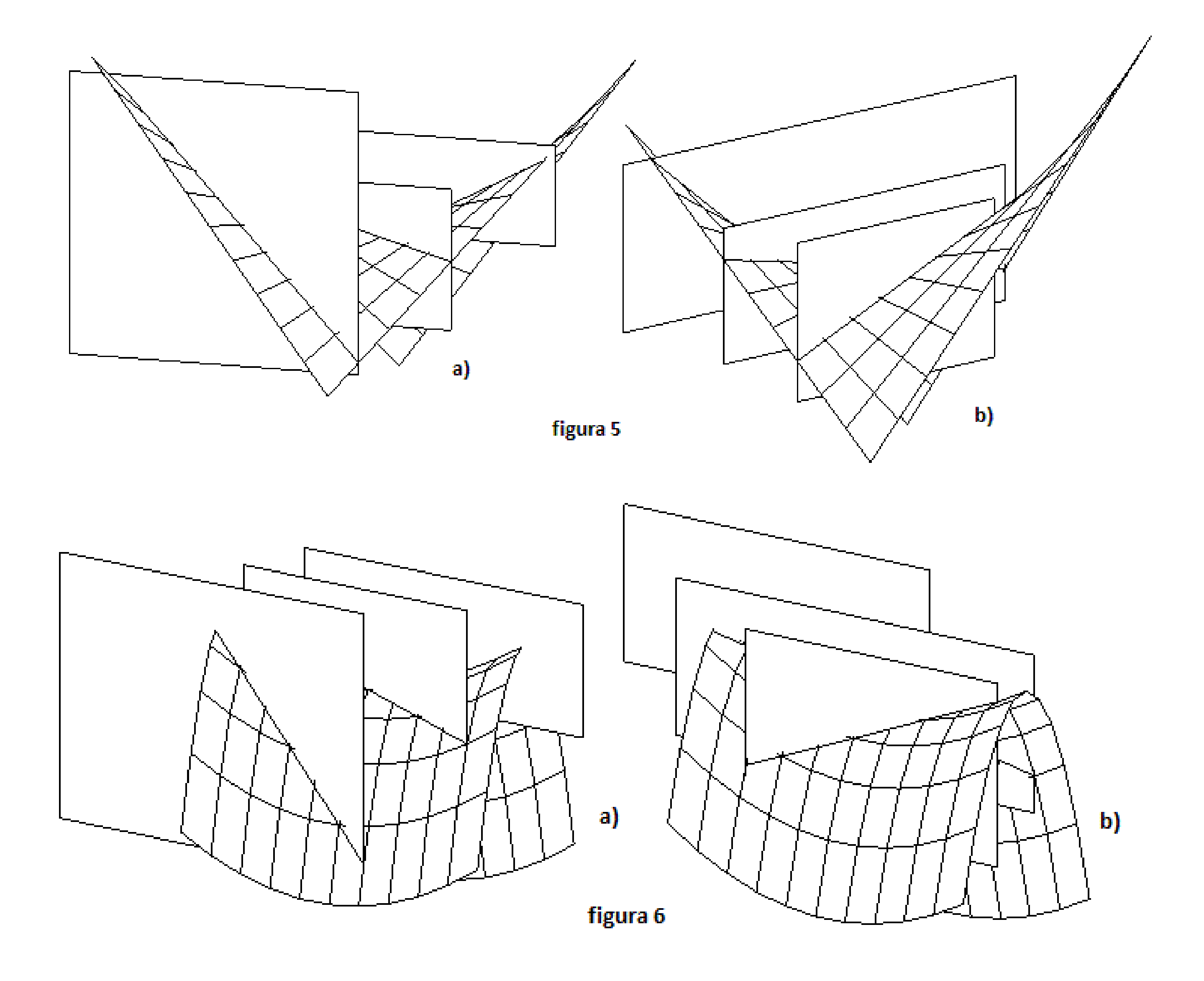


figura 5

figura 6

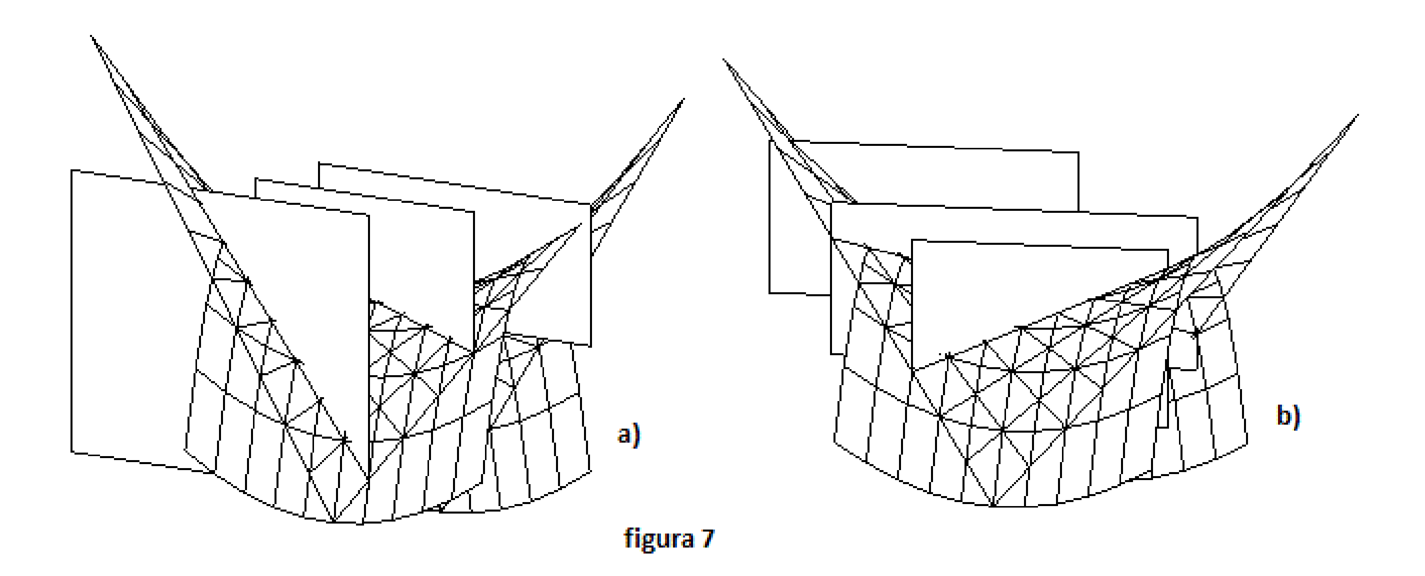


figura 7

Por otra parte podemos expresar la ecuación $\mathbf{z = a^2\, x^2 - b^2\, (y - \alpha\, x)^2}$ en la forma:

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{ax + b\,(y - \alpha\, x)}} - \mathbf{(a\,x - b\,(y - \alpha\,x)\,) = 0},$$

o bien:

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{ax - b\,(y - \alpha\, x)}} - \mathbf{(a\,x + b\,(y - \alpha\,x)\,) = 0}$$

que sigue, trivialmente, las formas genéricas:

$$\mathbf{f\,(}\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{ax + b\,(y - \alpha\, x)}}\mathbf{,\; a\,x - b\,(y - \alpha\,x) = 0},$$

o bien:

$$\mathbf{f\,(}\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{ax - b\,(y - \alpha\, x)}}\mathbf{,\; a\,x + b\,(y - \alpha\,x)) = 0},$$

por lo que esta superficie de traslación y, como hemos visto, reglada, resulta ser además, un conoide de eje $\mathbf{(a - \alpha\, b)\, x + b\, y = 0}$, $\mathbf{z = 0}$, con plano director $\mathbf{(a - \alpha\, b)\, x - b\, y = 0}$, o bien un conoide de eje $\mathbf{(a - \alpha\, b)\, x + b\, y = 0}$, $\mathbf{z = 0}$, con plano director $\mathbf{(a - \alpha\, b)\, x + b\, y = 0}$.

Esta dualidad propia de la superficie ya reflejada anteriormente será desarrollada a continuación y posteriormente en el **§ 2**.

1.3.- Una superficie doblemente reglada.

Consideremos de nuevo la superficie generada por traslación:

$$\underline{\mathbf{r}}\,\mathbf{(u, v) = \{\, u, v, a^2\, u^2 - b^2\, (v - \alpha\, u)^2\, \}}$$

El plano tangente en cualquiera de los puntos $\mathbf{(x_0,\ y_0,\ z_0)}$ de esta superficie correspondiente a las coordenadas curvilíneas $\mathbf{u = u_0,\ v = v_0}$ se podrá escribir:

$$\begin{vmatrix} x-u_0 & y-v_0 & z-a^2 u_0^2+b^2(v_0-\alpha u_0)^2 \\ 1 & 0 & 2a^2 u_0+2b^2\alpha(v_0-\alpha u_0) \\ 0 & 1 & -2b^2(v_0-\alpha u_0) \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \text{ o sea:}$$

$$(-2 a^2 u_0 - 2 b^2 \alpha (v_0-\alpha u_0)) (x - u_0) + 2 b^2 (v_0-\alpha u_0) (y - v_0) + z - a^2 u_0 + b^2 (v_0-\alpha u_0)^2 = 0,$$

o bien:

$$-(2 a^2 u_0 + 2 b^2 \alpha (v_0-\alpha u_0)) x + 2 b^2 (v_0-\alpha u_0) y + z + a^2 u_0^2 - b^2 v_0^2 + 2 b^2 \alpha u_0 v_0 - b^2\alpha^2 u_0^2 = 0$$

y la intersección de la superficie $\mathbf{x = u, y = v, z = a^2 u^2 - b^2 (v - \alpha u)^2}$ con su propio plano tangente en cada punto podrá obtenerse de la relación:

$$-(2 a^2 u_0 + 2 b^2 \alpha (v_0-\alpha u_0)) u + 2 b^2 (v_0-\alpha u_0) v + a^2 u^2 - b^2 (v - \alpha u)^2 + a^2 u_0^2 - b^2 v_0^2 + 2 b^2 \alpha u_0 v_0 - b^2 \alpha^2 u_0^2 = 0,$$

cuyas raíces son $\mathbf{v = v_0 + (\alpha \pm \frac{a}{b}) (u - u_0)}$, que nos proporciona las dos rectas parametrizadas en "**u**":

$$\{u, v_0 + (\alpha + \frac{a}{b})(u - u_0), 2 a((a + b \alpha) u_0 - b v_0) u - ((a + b \alpha) u_0 - b v_0)^2\} =$$

$$= (0, v_0 - (\alpha + \frac{a}{b}) u_0, -((a + b \alpha) u_0 - b v_0)^2) + u \{1, \alpha + \frac{a}{b}, 2 a ((a + b \alpha) u_0 - b v_0)\}$$

y

$$\{u, v_0 + (\alpha - \frac{a}{b})(u - u_0), 2 a((a - b \alpha) u_0 + b v_0) u - ((a - b \alpha) u_0 - b v_0)^2\} =$$

$$= (0, v_0 - (\alpha - \frac{a}{b}) u_0, -((a - b \alpha) u_0 + b v_0)^2) + u \{1, \alpha - \frac{a}{b}, 2 a ((a - b \alpha) u_0 + b v_0)\}$$

cuyas direcciones son, respectivamente, las:

$$\{b, b \alpha + a, 2 a b ((a + b \alpha) u_0 - b v_0)\} \quad \text{y} \quad \{b, b \alpha - a, 2 a b ((a - b \alpha) u_0 + b v_0)\}.$$

Puede comprobarse que estas dos familias de rectas son paralelas, respectivamente, a los planos $\mathbf{(b \alpha + a) x - b y + \zeta = 0}$ y $\mathbf{(b \alpha - a) x - b y + \xi = 0}$.

En la figura 8 pueden verse dos de las intersecciones de los planos tangentes con la superficie en dos puntos diferentes del paraboloide y las rectas que determinan sobre la superficie.

Teniendo en cuenta que toda recta contenida en la superficie queda contenida en el plano tangente a la superficie en cada uno de sus puntos podemos concluir que por cada punto de esta superficie de traslación pasan dos rectas de la superficie. Puesto que todos los puntos de este paraboloide son regulares se deduce que esta superficie se encuentra "fibrada" por dos haces de rectas. Las rectas de cada una de las familias están contenidas en planos paralelos y cada recta de una de las familias corta a todas las de la otra. Es por lo que se caracteriza a esta superficie como "doblemente reglada".

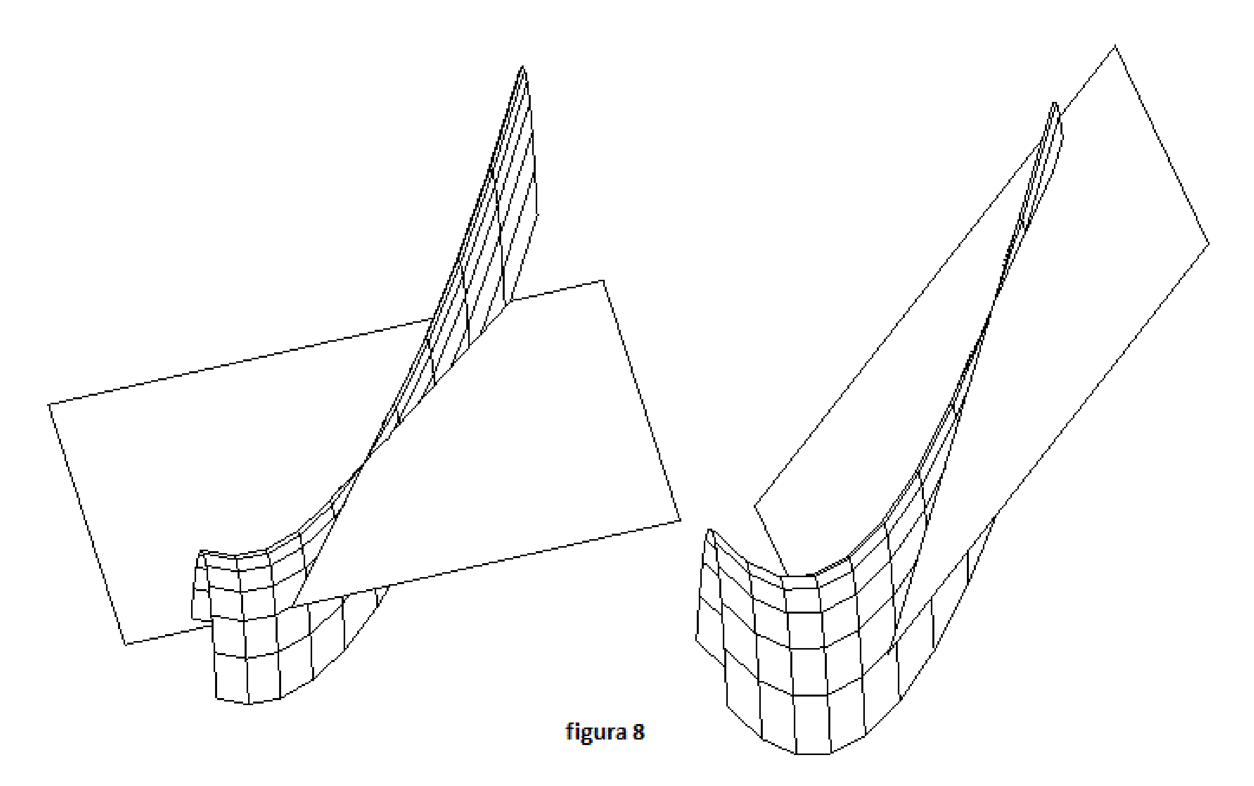


figura 8

A este mismo resultado se llega calculando directamente las líneas asintóticas de la superficie $(\mathbf{u, v, a^2 u^2 - b^2 (v - \alpha\ u)^2})$. Pueden obtenerse en la forma $[\mathbf{1}, \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{du}}] \equiv [\mathbf{1, w}]$ respecto de la base que determinan los vectores $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}$ y $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}$ sobre el plano tangente y donde **w** verifica:

$$\mathbf{g^* w^2 + 2 f^* w + e^* = 0 \;\; \Rightarrow \;\; w = \alpha \pm \frac{a}{b}}$$

y de aquí, integrando la ecuación $\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{du}} = \alpha \pm \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$, se obtiene:

$$\mathbf{v = (\alpha + \frac{a}{b})\ u + \varsigma} \quad \text{y} \qquad \mathbf{v = (\alpha - \frac{a}{b})\ u + \xi}$$

con lo que podemos expresar estas líneas por:

$$\mathbf{(u, (\alpha + \frac{a}{b})\ u + \varsigma, a^2 u^2 - b^2 ((\alpha + \frac{a}{b})\ u + \varsigma - \alpha\ u)^2)},$$

$$\mathbf{(u, (\alpha - \frac{a}{b})\ u + \xi, a^2 u^2 - b^2 ((\alpha - \frac{a}{b})\ u + \xi - \alpha\ u)^2)},$$

es decir las rectas

$$\mathbf{(0, \varsigma, - b^2 \zeta^2) + u \{1, \alpha + \frac{a}{b}, - 2\ a\ b\ \zeta\}} \quad \text{y} \quad \mathbf{(0, \xi, - b^2 \xi^2) + u \{1, \alpha - \frac{a}{b}, \ 2\ a\ b\ \xi\}}$$

que con $\varsigma = \mathbf{v_0 - (\alpha + \frac{a}{b})\ u_0}$ y $\xi = \mathbf{v_0 - (\alpha - \frac{a}{b})\ u_0}$ son las obtenidas anteriormente.

La superficie contiene por lo tanto dos familias de líneas asintóticas rectas. Cualquiera de las dos familias cubre la superficie la puede describir paramétricamente. Así, tomando la primera de ellas

$$\underline{\mathbf{S}}_{\mathbf{a}}\,(\zeta, \mathbf{u}) = (\,0, \varsigma, -\,\mathbf{b}^2\,\zeta^2) + \mathbf{u}\,\{1, \alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, -\,2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\zeta\}$$

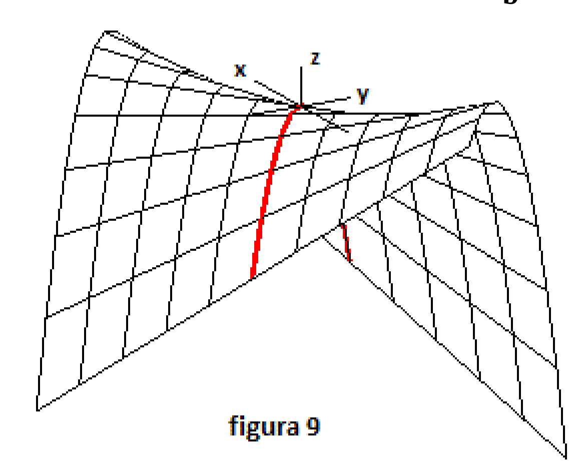


figura 9

muestra una superficie reglada en la que las líneas ζ = **cte** o "curvas **u**" son las rectas generatrices en tanto las **u = cte** o "curvas ζ" son parábolas contenidas en planos paralelos al **XOZ**. La propia directriz de la parametrización es la parábola contenida en el **x = 0**. Un fragmento de esta superficie puede verse en la figura 9

Si queremos ahora describir la superficie haciendo explícito su carácter doblemente reglado podremos tomar como directriz cualquiera de las rectas de una de las dos familias de líneas asintóticas en tanto conservemos como dirección de las generatrices las de la otra. Eligiendo, por ejemplo, como directriz la recta $\varsigma = \mathbf{v} - (\alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ que corresponde a la familia $(\,\mathbf{u}, (\alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u}, 0)$ y conservando la dirección de las generatrices de la segunda familia, obtenemos la parametrización:

$$(\,\mathbf{u}, (\alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u}, 0) + \lambda\,\{1, \alpha - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}},\; 2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\xi\},$$

donde $\xi = \mathbf{v} - (\alpha - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u} = (\alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u} - (\alpha - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u} = 2\,\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\,\mathbf{u}$,

con lo que podrá expresarse finalmente por:

$$(\,\mathbf{u}, (\alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u}, 0) + \lambda\,\{\,1, \alpha - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}},\; 4\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{u}\,\} = (\,\mathbf{u} + \lambda, (\alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\mathbf{u} + \lambda\,(\alpha - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}), 4\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{u}\,\lambda\,)$$

que, así mismo, puede escribirse:

$$(\lambda, (\alpha - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}})\,\lambda, 0) + \mathbf{u}\,\{\,1, \alpha + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}},\; 4\,\mathbf{a}^2\,\lambda\,\}$$

Cualquiera de las dos parametrizaciones propias de esta superficie verificarán en todo caso $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}} = \underline{\mathbf{r}}_{\lambda\lambda} = \mathbf{0}$, así que e* = g* = 0. No existen generatrices de puntos parabólicos y las líneas asintóticas coinciden con las líneas coordenadas por lo que la imagen es la que se nuestra en la figura 10.

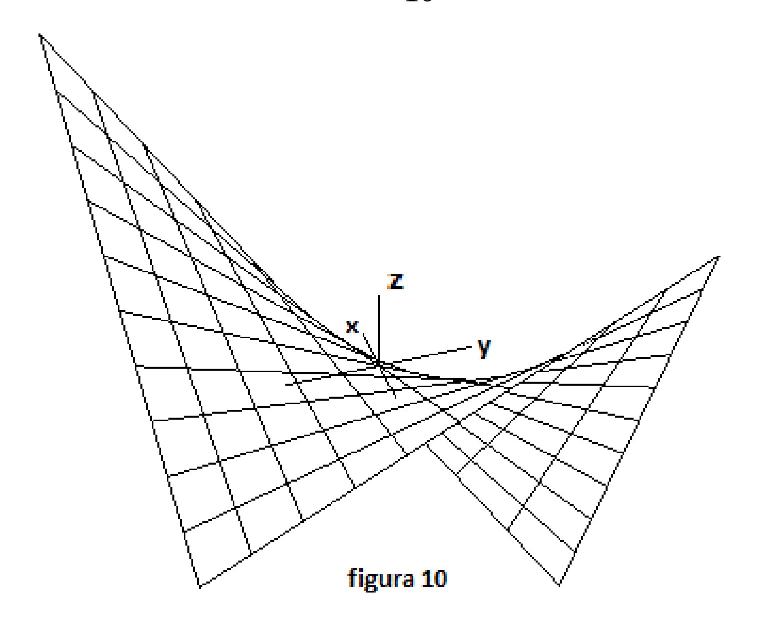


figura 10

1.4.- El caso α = 0.

Los resultados anteriores han sido obtenidos para una posición relativa arbitraria de los planos que contienen las parábolas que generan la superficie por traslación. Particularmente es muy notable el caso en que las dos parábolas se encuentren en planos perpendiculares que se corresponde en los cálculos anteriores con el valor **α = 0**. En este caso la superficie puede generarse por traslación de la $\mathbf{z = a^2 x^2, y = 0}$ sobre la $\mathbf{z = -b^2 y^2, x = 0}$.

Se representa esta superficie en la figura 11 y puede formularse paramétricamente por:

$$\underline{\mathbf{r}}\ \mathbf{(x, y) = \{x, 0, a^2 x^2\} + \{0, y, -b^2 y^2\} = \{x, y, a^2 x^2 - b^2 y^2\}}$$

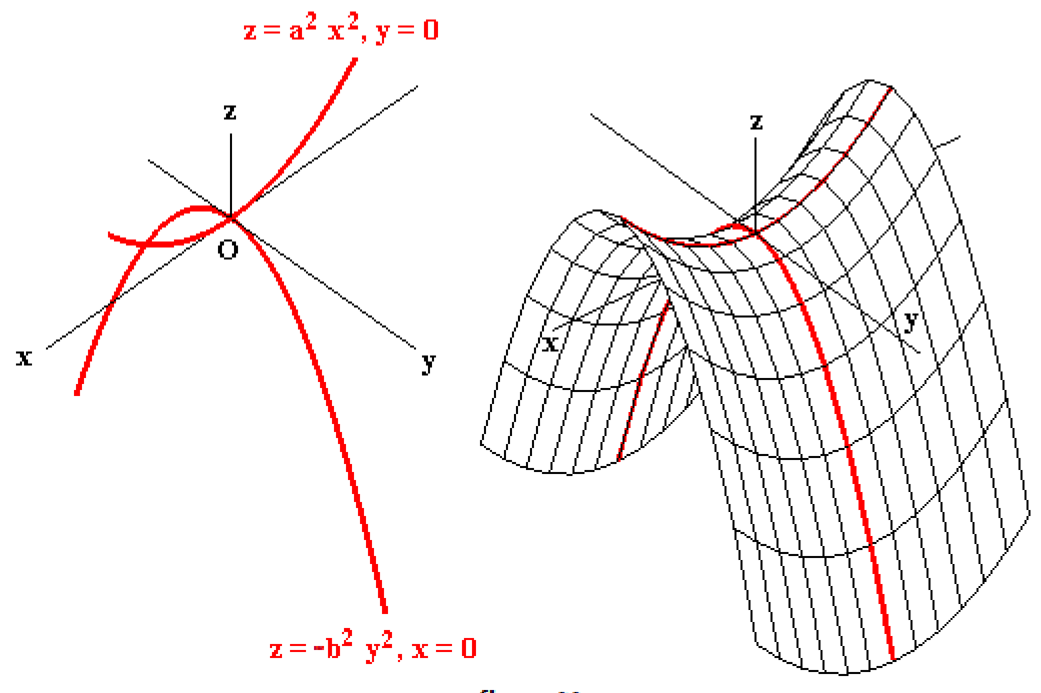


figura 11

que se corresponde con la forma de Monge: $\mathbf{z = a^2\ x^2\ – b^2\ y^2}$ y que podemos escribir utilizando la notación genérica con los parámetros "**u**" **y** "**v**" en la forma:

$$\mathbf{S \equiv (u, v, a^2 u^2 - b^2 v^2)} \qquad \text{ó bien} \qquad \mathbf{\underline{r}\,(u, v) = \{u, v, a^2 u^2 - b^2 v^2\}}$$

Los vectores $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}}$, $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uv}}$, $\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{vv}}$ serán ahora:

$$\mathbf{\underline{r}_{uu} = \{0, 0, 2\,a^2\},\ \underline{r}_{uv} = 0,\ \underline{r}_{vv} = \{0, 0, -2\,b^2\}},$$

y los numeradores de los coeficientes de la **II**:

$$\mathbf{e^* = 2\,a^2\ ,\ f^* = 0\ ,\ g^* = -\,2\,b^2},$$

así que $\mathbf{h^*}$ conserva sobre la superficie el valor constante $\mathbf{h^* = e^*\,g^* - f^{*2} = -\,4\,a^2\,b^2 < 0}$

El plano tangente en cualquiera de sus puntos $\mathbf{(x_0,\ y_0,\ z_0)}$ correspondiente a las coordenadas curvilíneas $\mathbf{u = u_0,\ v = v_0}$ resultará ser ahora:

$$\mathbf{2\,a^2\,u_0\,x - 2\,b^2\,v_0\,y - z - a^2\ u_0^2\ + b^2\ v_0^2\ = 0}$$

y la intersección de la superficie con su propio plano tangente en cada punto puede obtenerse de la relación:

$$\mathbf{b^2\,v^2 - 2\,b^2\,v_0\,v - a^2\,u^2\ + 2\,a^2\,u_0\,u - a^2\ u_0^2\ + b^2\ v_0^2\ = 0},$$

cuyas raíces son $\mathbf{v = v_0 \pm \frac{a}{b}\,(u - u_0)}$, lo que nos proporciona las dos rectas:

$$\mathbf{\{u,\ v_0 + \frac{a}{b}\,(u - u_0),\ 2\,a\,(a\,u_0 - b\,v_0)\,u - (a\,u_0 - b\,v_0)^2\} = (0, -\frac{a}{b}\,u_0, -(a\,u_0 - b\,v_0)^2) + u\,\{1,\ \frac{a}{b}\,,\ 2\,a\,(a\,u_0 - b\,v_0)\}}$$

$$\mathbf{\{u,\ v_0 - \frac{a}{b}\,(u - u_0),\ 2\,a\,(a\,u_0\ + b\,v_0)u - (a\,u_0\ + b\,v_0)^2\} = (0,\ \frac{a}{b}\,u_0, -(a\,u_0 - b\,v_0)^2) + u\,\{1, -\frac{a}{b}\,,\ 2\,a\,(a\,u_0 - b\,v_0)\}}$$

cuyas direcciones son, respectivamente, las

$$\mathbf{\{b,\ a,\ 2\,a\,b\,(a\,u_0 - b\,v_0)\}}\ \ \text{y}\ \ \mathbf{\{b, -a,\ 2\,a\,b\,(a\,u_0 - b\,v_0)\}}$$

que son paralelas, respectivamente, a los planos $\mathbf{a\,x - b\,y + c = 0}$ y $\mathbf{a\,x + b\,y + d = 0.}$

En la figura 12 se muestran algunas de las intersecciones de la superficie con su plano tangente en los puntos "**P**" y "**Q**".

Las líneas asintóticas de la superficie $\mathbf{(u,\ v,\ a^2\ u^2\ – b^2\ v^2\ )}$ se pueden obtener de la ecuación:

$$\mathbf{g^*\,w^2 + 2\,f^*\,w + e^* = 0}\ \ \Rightarrow\ \ \mathrm{w} = \pm\,\mathbf{\frac{a}{b}}$$

y de aquí $\mathbf{v = +\ \frac{a}{b}\,u + \varsigma}$ y $\mathbf{v = -\ \frac{a}{b}\,u + \xi}$ de lo que resultan las rectas:

$$\mathbf{(\ u,\ \frac{a}{b}\,u + \varsigma\,, -\,2\,a\,b\,\varsigma\,u - b^2\,\varsigma^2\ )}\ \ \text{y}\ \ \mathbf{(\ u, -\frac{a}{b}\,u + \xi\,,\ \ 2\,a\,b\,\xi\,u - b^2\,\xi^2\ )}$$

que con $\varsigma = \mathbf{v_0} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}(\mathbf{u} - \mathbf{u_0})$, o bien $\xi = \mathbf{v_0} - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}(\mathbf{u} - \mathbf{u_0})$, son las ya obtenidas anteriormente.

La primera de las familias puede ser desarrollada en la forma

$$(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u} + \varsigma, -2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\varsigma\,\mathbf{u} - \mathbf{b}^2\varsigma^2) = (0, \varsigma, -\mathbf{b}^2\varsigma^2) + \mathbf{u}\,\{1, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, -2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\varsigma\}$$

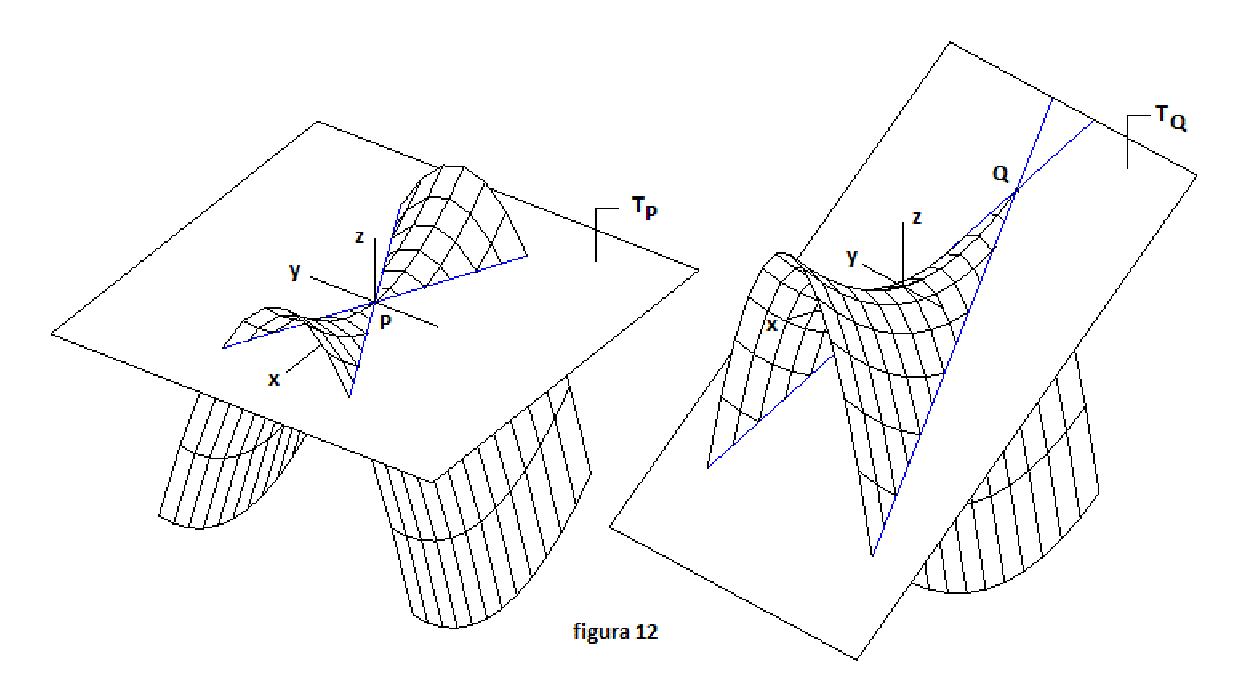


figura 12

y la segunda puede escribirse

$$(\mathbf{u}, -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u} + \vartheta,\ 2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\xi\,\mathbf{u} - \mathbf{b}^2\xi^2) = (0, \xi, -\mathbf{b}^2\xi^2) + \mathbf{u}\,\{1, -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, 2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\xi\}$$

Análogamente para describir la superficie paramétricamente haciendo explícito su carácter doblemente reglado podremos tomar como directriz cualquiera de las rectas de una de las dos familias asintóticas en tanto conservemos como dirección de las generatrices las de la otra familia. Siguiendo el mismo guión desarrollado anteriormente en el caso general, podemos tomar, por ejemplo como directriz la recta $\varsigma = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ de la primera familia lo que proporciona la recta $(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u}, 0)$ y tomando la dirección de las generatrices de la segunda familia, obtenemos la parametrización:

$$(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u}, 0) + \lambda\,\{1, -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, 2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\xi\}, \text{ en la que } \xi = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u} = 2\,\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u},$$

con lo que podrá expresarse finalmente por:

$$(\mathbf{u}, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\mathbf{u}, 0) + \lambda\,\{1, -\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, 4\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{u}\} = (\mathbf{u} + \lambda, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}(\mathbf{u} - \lambda), 4\,\mathbf{a}^2\,\mathbf{u}\,\lambda)$$

y con el cambio simple de escala **u = b u', λ = b λ'** obtenemos aquí la representación paramétrica bien conocida:

$$(b (u' + \lambda'), a (u' - \lambda'), 4 a^2 b^2 u' \lambda')$$

que se corresponde con la imagen de la figura 13-b. Esta es una expresión clásica del paraboloide generado con dos parábolas en planos perpendiculares.

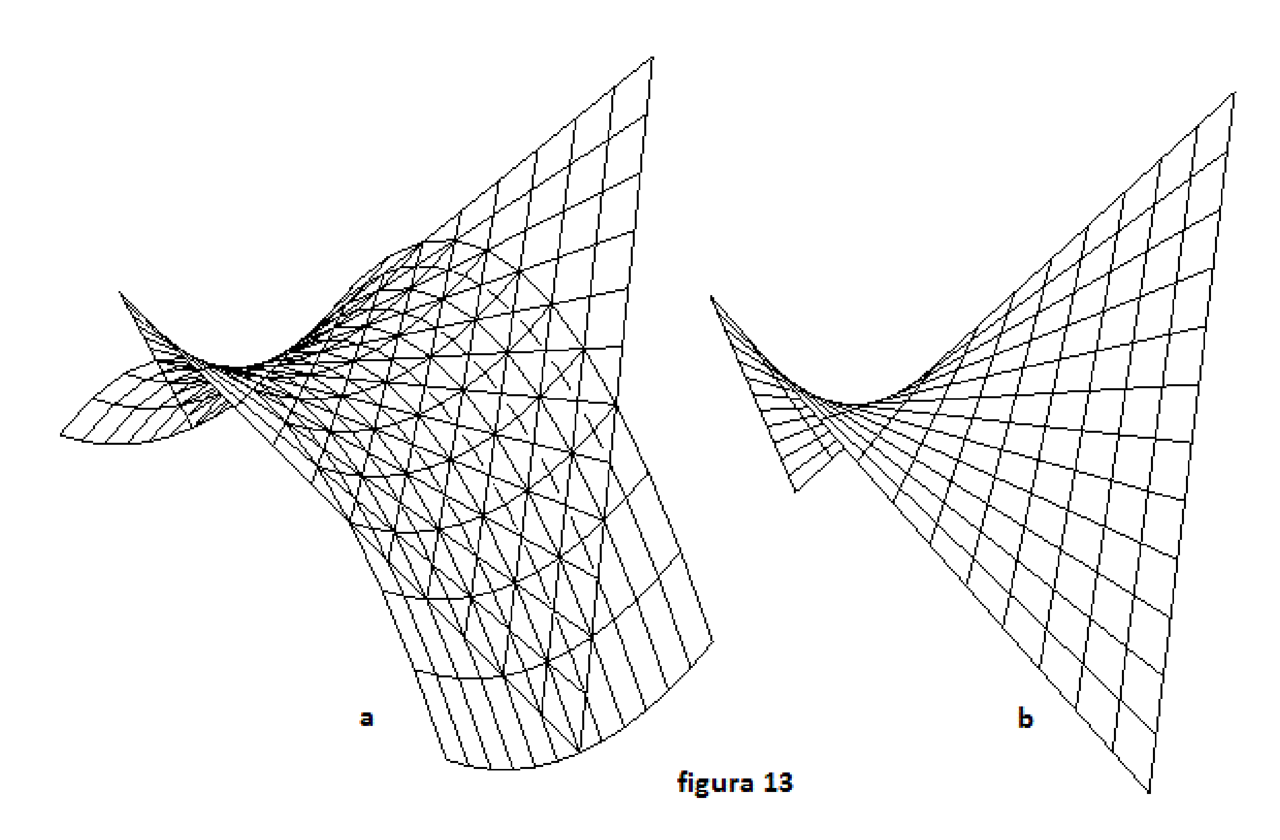


figura 13

§ 2.-- Un conoide.

2.1.- Conoides de transición entre dos rectas que se cruzan. Sus líneas de estricción.

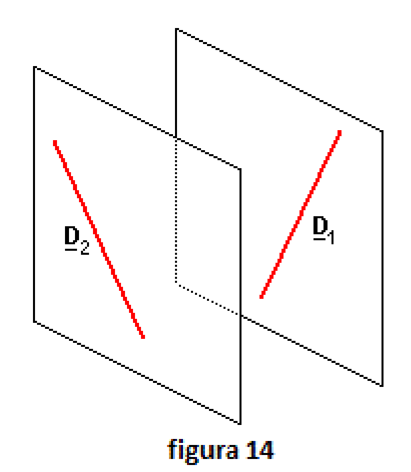


figura 14

Dos rectas cualesquiera que se cruzan se encuentran contenidas planos paralelos. Hablar de rectas no paralélelas en planos paralelos es simplemente hablar de rectas no coplanarias –figura 14–.

Nos interesamos ahora por algunas superficies regladas de transición entre dos rectas no coplanarias –directrices– engendradas por una familia de rectas –generatrices– que se apoyen en ambas.

Sin perder generalidad, podemos hacer coincidir una de las directrices $\underline{\mathbf{D}}_1$ con el eje **OZ** siendo su formulación paramétrica **(0, 0, u)** en tanto la segunda directriz $\underline{\mathbf{D}}_2$ será una recta cualquiera del plano **x = a**, de manera que no sea paralela al eje **OZ**. Con toda generalidad podemos hacer pasar esta última por el punto **(a, 0, 0)**, como se muestra en la figura 15 y su representación paramétrica puede describirse por **(a, φ, γ φ)** siendo **a, γ** números reales y "**φ**" el parámetro.

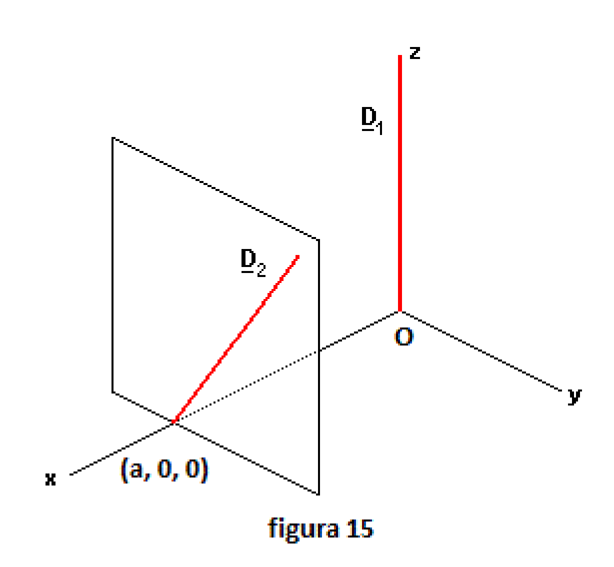


figura 15

Podemos construir diferentes familias de superficies regladas que se apoyen en ambas rectas. Una de ellas resultaría de imponer la condición de que las generatrices se apoyen además en una tercera directriz propia lo que nos llevaría directamente a la necesaria compatibilidad del correspondiente sistema de ecuaciones. En este conjunto de superficies generado con tres directrices encontramos algunas muy notorias. Si esta tercera directriz fuera, por ejemplo, una recta no paralela ni coplanaria con las otras dos y no situada en un plano paralelo a los de ambas generaríamos el hiperboloide alabeado y si esta tercera directriz fuera así mismo una recta no paralela a cualquiera de las dos pero en un plano paralelo a los de ambas generaríamos el propio paraboloide hiperbólico. Esta última "construcción" del paraboloide hiperbólico se realizará en el **§ 3**. Otras superficies muy significativas que pueden generarse eligiendo adecuadamente una tercera directriz es, por ejemplo, la superficie del "envase" central tetraédrico.

Se obtiene un conjunto muy general de superficies generadas solamente con las dos directrices $\underline{\mathbf{D}}_1$ y $\underline{\mathbf{D}}_2$ estableciendo una relación entre los parámetros "**φ**" y "**u**". Considerando **φ = φ(u)**, las direcciones de las generatrices que se apoyan en ambas directrices serán las del vector:

$$\{ \mathbf{a}, \varphi, \gamma\,\varphi \} - \{ 0, 0, \mathbf{u} \} = \{ \mathbf{a}, \varphi, \gamma\,\varphi - \mathbf{u} \}$$

y, en estas condiciones, las superficies de transición entre ambas rectas podrá representarse por:

$$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi)=(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{u})+\mathbf{v}\{\mathbf{a}, \varphi, \gamma\, \varphi - \mathbf{u}\}= \{\, \mathbf{v\, a}, \mathbf{v}\, \varphi, (\mathbf{1}-\mathbf{v})\, \mathbf{u}+ \gamma\, \mathbf{v}\, \varphi \,\}.$$

Estas superficies verifican:

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}} =\{0, \mathrm{v}\, \dot{\varphi}, 1- \mathrm{v} + \gamma\, \mathrm{v}\, \dot{\varphi}\},\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}} =\{\mathrm{a}, \varphi, \gamma\, \varphi - \mathrm{u}\}$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}} =\{0, \mathrm{v}\, \ddot{\varphi}, \gamma\, \mathrm{v}\, \ddot{\varphi}\,\},\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uv}} =\{0, \dot{\varphi}, \gamma\, \dot{\varphi} -1\},\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{0}\ \ (\mathbf{g}^*= \mathbf{0}).$$

y su parámetro de distribución es:

$$\mathbf{f}^* = \begin{vmatrix} 0 & \dot{\varphi} & \gamma\dot{\varphi} - 1 \\ 0 & \mathrm{v}\,\dot{\varphi} & 1 - \mathrm{v} + \gamma\, \mathrm{v}\dot{\varphi} \\ \mathrm{a} & \varphi & \gamma\, \varphi - \mathrm{u} \end{vmatrix} = \mathrm{a}\dot{\varphi},$$

por lo que todas ellas son superficies alabeadas exceptuando el caso en que $\dot{\varphi}\ (\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, o sea: el caso de la función $\varphi = \mathbf{cte}$. Este último caso corresponde a planos que conteniendo al eje **OZ** cortan a la recta **x = a**, **z = γ y**, en el punto **(a, φ, γ φ)** –figura 16–. El plano no contiene a las dos directrices sino que contiene en realidad a un solo punto de una de las dos. No existe por lo tanto en esta familia una superficie de transición entre ambas líneas directrices que sea reglada desarrollable exceptuando el plano. Esta es una propiedad común a todos los conoides sea cual sea su origen. Puede comprobarse, además, que este conjunto de superficies carece de puntos singulares para **a≠0**.

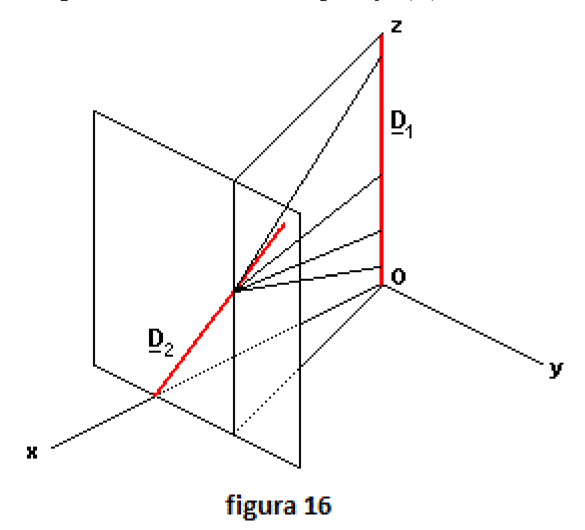


figura 16

Podemos generar ahora diferentes superficies de esta familia eligiendo arbitrariamente otras tantas funciones **φ(u)**, siendo $\dot{\varphi} \neq \mathbf{0}$.

Particularizando los valores de **a** y de **γ**, en la figura 17 se muestran algunos ejemplos de estas superficies para algunas funciones sencillas **φ** representando las distintas "hojas" de transición resultantes entre las directrices $\underline{\mathbf{D}}_1$ y $\underline{\mathbf{D}}_2$. Son los casos de las funciones:

$$\varphi = \mathbf{sen\ u},\ \ \varphi = \mathbf{u\ cos\ u},\ \ \varphi = \mathbf{u}^4,\ \ \varphi = \frac{1}{2}\,(-\mathbf{u} + \sqrt{8 - \mathbf{u}^2}\,)$$

la última de las cuales determina a su vez un fragmento parcial de la superficie del envase tetraédrico.

Si entre todas las superficies de esta familia seleccionamos las de plano director genérico **A x + B y + Cz + D = 0**, es decir, los posibles conoides de transición entre ambas rectas. las generatrices deberán verificar:

$$\{\mathbf{a}, \varphi, \gamma\, \varphi-\mathbf{u}\}\ \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\} = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A\ a}+ \mathbf{B}\,\gamma+ \mathbf{C}\,(\gamma\, \varphi-\mathbf{u})= \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{B}+ \mathbf{C}\,\gamma)\, \varphi= \mathbf{C\ u}- \mathbf{A\ a},$$

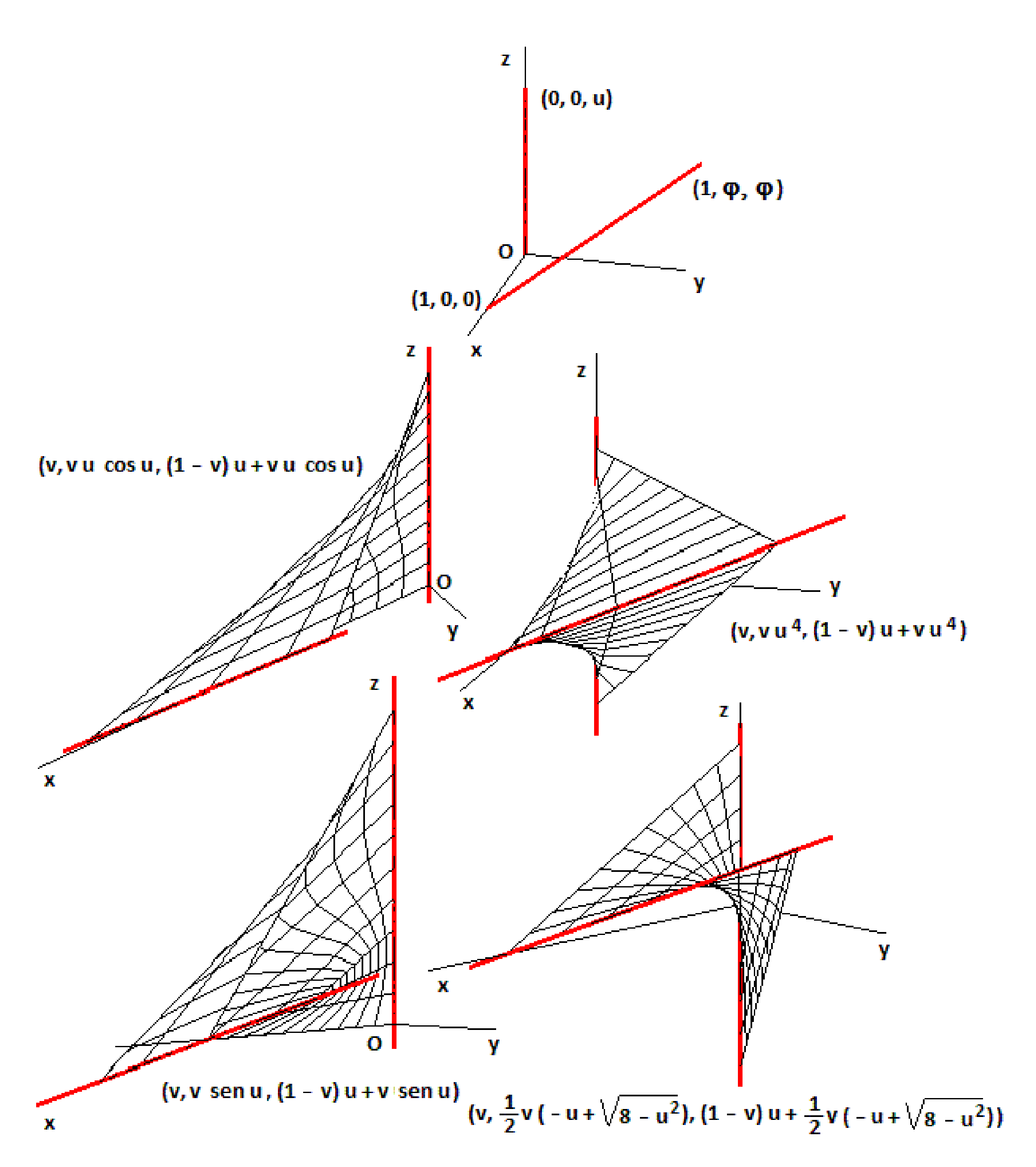


figura 17

y de aquí:

$$\varphi = \frac{C}{B+\gamma C}\ u - \frac{A\,a}{B+\gamma C}, \qquad \text{con } B+\gamma\, C \neq 0.$$

Los conoides buscados se corresponden por lo tanto con un función **φ** lineal del parámetro "**u**", es decir, genéricamente con una función $\varphi = c_1\, u + c_2$. En general todos estos conoides tendrán la representación paramétrica:

$$(\ v\ a,\ v\ (c_1\ u + c_2),\ (1- v)\ u + \gamma\ v\ (c_1\ u + c_2)\ ) = (0, 0, u) + v\ \{\ a,\ c_1\ u + c_2,\ \gamma\ (c_1\ u + c_2) - u\ \},$$

y en todos ellos se verifica **e* = g* = 0**, **f* = a** c_1, así que las líneas asintóticas coincidirán en todo caso con las líneas coordenadas **u** = ζ = **cte**, **v** = ξ = **cte**, que son las dos familias de rectas:

$$(\, v\, a,\ v(c_1\,\zeta+c_2),\ (1-v)\,\zeta + \gamma\, v\,(c_1\,\zeta+c_2)\,) \quad \text{y} \quad (\,\xi\, a,\ \xi\,(c_1\, u + c_2),\ (1-\xi)\, u + \gamma\,\xi\,(c_1\, u + c_2)\,),$$

la segunda de las cuales contiene a las dos rectas directrices para $\xi=1$ y $\xi=0$, respectivamente, en tanto la primera es la congruencia de generatrices. En la figura 18 se muestran tres de estos paraboloides para diferentes funciones φ.

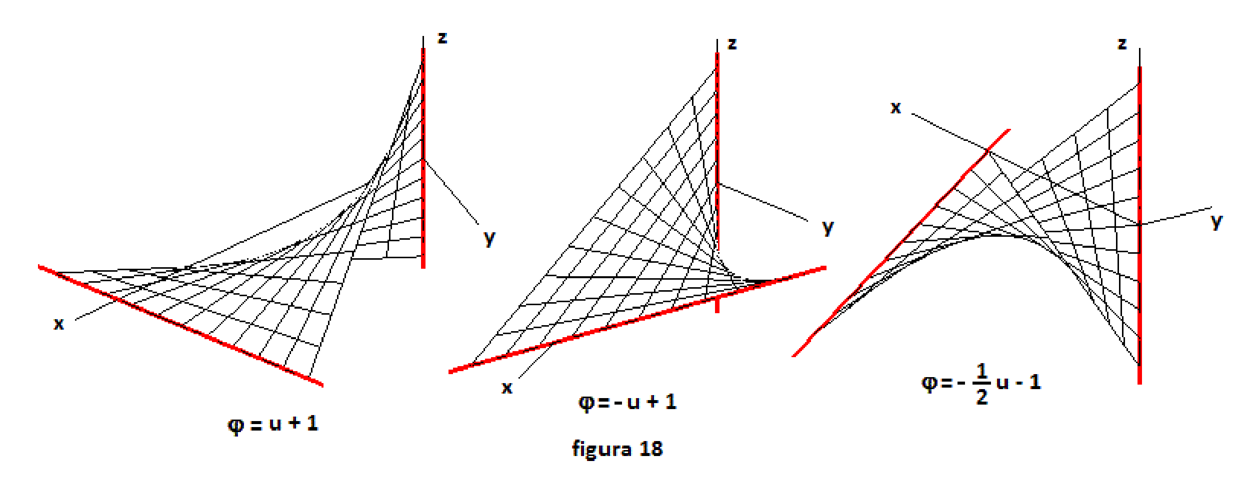


figura 18

Se deduce de todo lo anterior que estos conoides son paraboloides hiperbólicos. Siendo estos últimos los únicos conoides de transición entre dos rectas que se cruzan resulta, por tanto, una propiedad privativa de estas superficies.

Nos interesamos finalmente por la línea de estricción de este conjunto de paraboloides hiperbólicos. De su parametrización propia:

$$\underline{D}_1(u) + v\, d(u) \equiv (0, 0, u) + v\,\{\, a,\ c_1\, u + c_2,\ \gamma\,(c_1\, u + c_2) - u\,\}$$

obtenemos los productos

$$\dot{\underline{D}}_1 \times \underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & c_1 u + c_2 & -u + \gamma\,(c_1 u + c_2) \end{vmatrix} = \{-c_1\, u - c_2,\ a,\ 0\}$$

$$\dot{\underline{d}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & -1 + \gamma\, c_1 \\ a & c_1\, u + c_2 & -u + \gamma\,(c_1 u + c_2) \end{vmatrix} = \{\, c_2,\ (-1 + \gamma\, c_1)\, a,\ -c_1\, a\}$$

así que sus puntos centrales se obtendrán para valores

$$v = v_c = -\frac{(\dot{\underline{D}}_1 \times \underline{d})\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d})}{(\dot{\underline{d}} \times \underline{d})\ (\dot{\underline{d}} \times \underline{d})} = -\frac{-c_1\, c_2\, u - c_2^{\,2} - a^2 + a^2\,\gamma\, c_1}{c_2^{\,2} + a^2 - 2\, a^2\,\gamma\, c_1 + a^2\,\gamma^2\, c_1^{\,2} + a^2 c_1^{\,2}},$$

y las líneas de estricción serán por lo tanto las curvas:

$$\underline{w}(u, c_1, c_2) = \{-\frac{(-c_1 c_2 u - c_2^2 - a^2 + a^2 \gamma c_1) a}{c_2^2 + a^2 - 2a^2 \gamma c_1 + a^2 \gamma^2 c_1^2 + a^2 c_1^2},$$

$$-\frac{(-c_1 c_2 u - c_2^2 - a^2 + a^2 \gamma c_1)(c_1 u + c_2)}{c_2^2 + a^2 - 2a^2 \gamma c_1 + a^2 \gamma^2 c_1^2 + a^2 c_1^2}, u - \frac{(-c_1 c_2 u - c_2^2 - a^2 + a^2 \gamma c_1)(-u + \gamma (c_1 u + c_2))}{c_2^2 + a^2 - 2a^2 \gamma c_1 + a^2 \gamma^2 c_1^2 + a^2 c_1^2}\},$$

que son curvas planas ($\dddot{\underline{w}} = \mathbf{0}$), en las que $\ddot{\underline{w}}$ es normal al eje **OX y** que resultan ser parábolas, salvo para $\mathbf{c_2 = 0}$ que corresponde al caso en que el plano director es paralelo al eje **OX**, es decir, para la función $\boldsymbol{\varphi = c_1 u}$, en que son las rectas:

$$(-\frac{(-1+\gamma c_1) a}{1 - 2\gamma c_1 + \gamma^2 c_1^2 + c_1^2}, -\frac{(-1+\gamma c_1) c_1 u}{1 - 2\gamma c_1 + \gamma^2 c_1^2 + c_1^2}, \frac{c_1^2 u}{1 - 2\gamma c_1 + \gamma^2 c_1^2 + c_1^2}),$$

de dirección:

$$\{0, \frac{(1-\gamma c_1) c_1}{1 - 2\gamma c_1 + \gamma^2 c_1^2 + c_1^2}, \frac{c_1^2}{1 - 2\gamma c_1 + \gamma^2 c_1^2 + c_1^2}\}.$$

En la figura 19 se muestran las líneas de estricción de los fragmentos de superficies ya representados en la figura 18 que son parábolas.

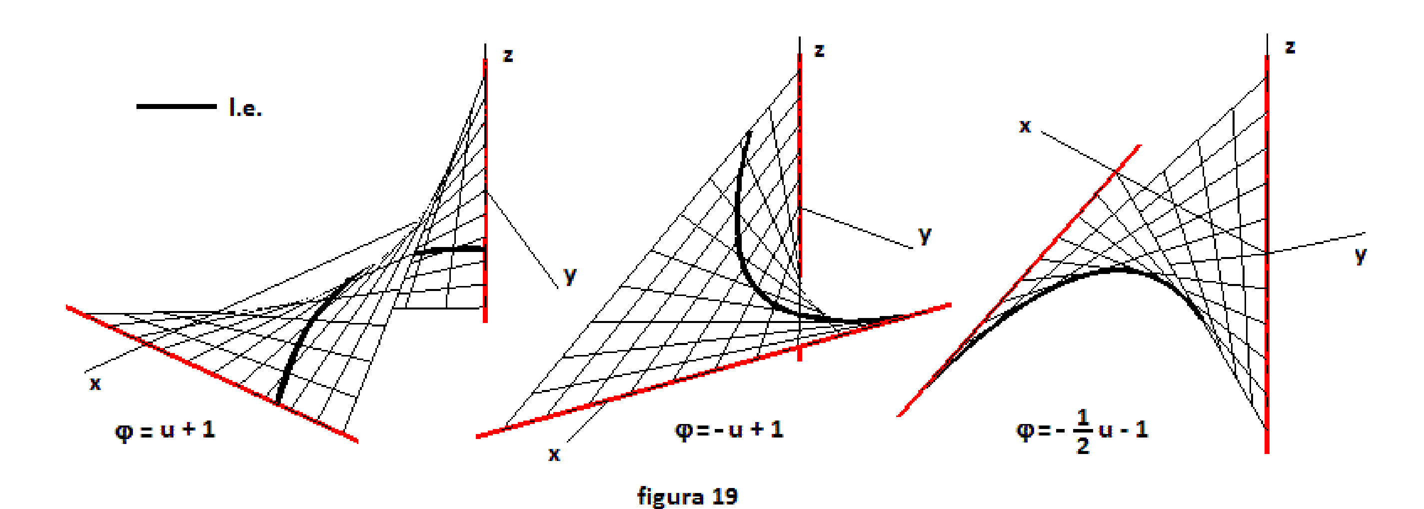


figura 19

En la figura 20 se representan las hojas que resultan de tomar un valor negativo y otro positivo de $\mathbf{c_1}$ siendo en todo caso $\mathbf{c_2 = 0}$. Sus líneas de estricción que son ahora rectas quedan entre las directrices o fuera del fragmento determinado entre ellas.

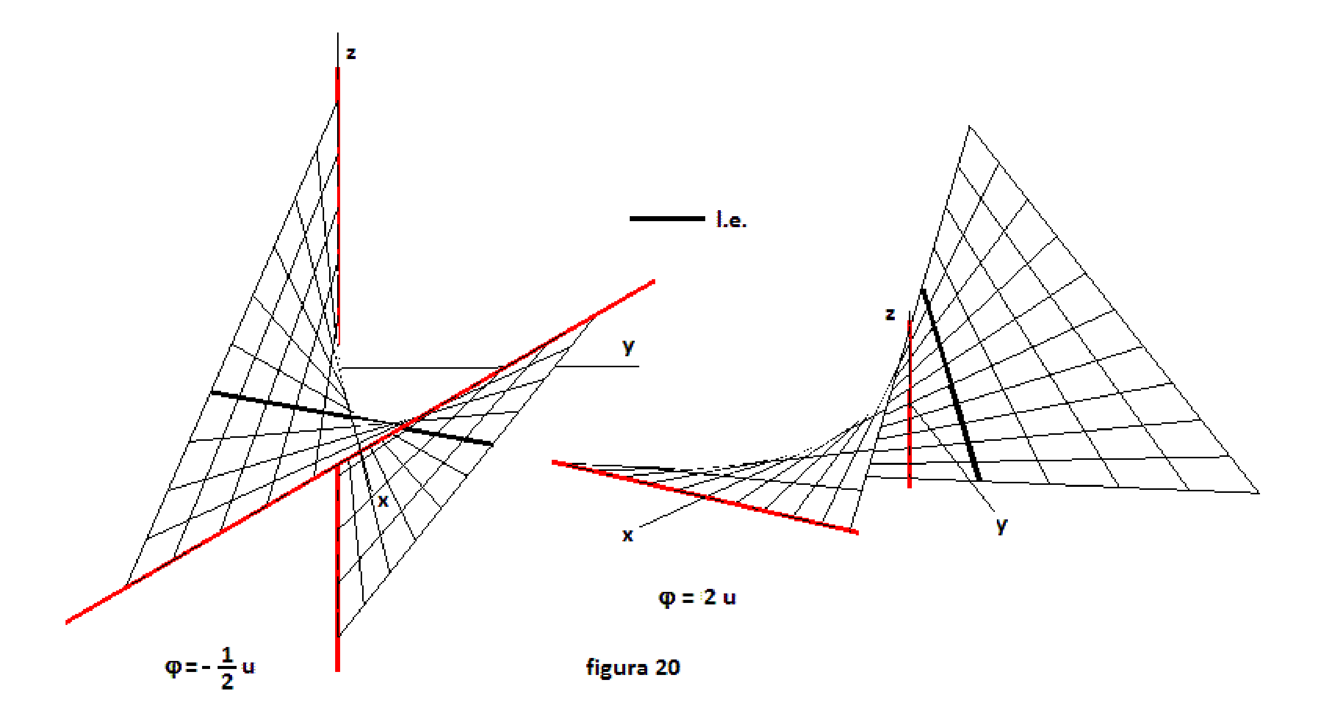


figura 20

2.2.-Replanteo de los paraboloides de transición.

Los paraboloides hiperbólicos en las condiciones señaladas anteriormente vienen condicionados por la función $\boldsymbol{\varphi = c_1\, u + c_2}$ por lo que finalmente tendrán conjuntamente como expresión paramétrica:

$$\mathbf{(0,\ 0,\ u) + v\ \{a,\ c_1\, u + c_2,\ \gamma\ (c_1\, u + c_2) - u\} = (a\ v,\ (c_1\, u + c_2)\ v,\ \gamma\ (c_1\, u + c_2)\ v + (1-v)\ u)}$$

que dependen de los valores tomados para $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$ que son los que individualizan el paraboloide. Se puede tomar como directriz de la superficie la $\underline{\mathbf{D}}_2$ así que también este conjunto puede ser descrito en su forma propia por:

$$\mathbf{(a,\ c_1\, u + c_2,\ \gamma\ (c_1\, u + c_2)) + \upsilon\ \{a,\ c_1\, u + c_2,\ \gamma\ (c_1\, u + c_2) - u\}}$$

Estableciendo como origen de medida el de coordenadas sobre la directriz $\underline{\mathbf{D}}_1$–eje **OZ**–, la longitud entre el origen y un punto cualquiera de la directriz será $\boldsymbol{\mu = u}$. Tomando ahora el punto $\mathbf{A \equiv (a,\ 0,\ 0)}$ como origen sobre la $\underline{\mathbf{D}}_2$ la longitud del segmento entre **A** y cualquiera de sus puntos será $\boldsymbol{\lambda} = \sqrt{\boldsymbol{\varphi^2 + \gamma^2\ \varphi^2}} = \varphi\ \sqrt{\mathbf{1 + \gamma^2}}$.

Podemos ahora trazar directamente cualquier generatriz entre ambas directrices. Si medimos desde la directriz $\underline{\mathbf{D}}_1$ una longitud $\boldsymbol{\mu = u}$ la generatriz correspondiente alcanzará el punto de longitud $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{(c_1\ u\ +\ c_2)}\ \sqrt{\mathbf{1 + \gamma^2}}$ medido desde **A**. Si, por el contrario queremos trazar la generatriz desde la directriz $\underline{\mathbf{D}}_2$, cada punto separado una distancia $\boldsymbol{\lambda}$ medida desde **A** alcanzará al eje **OZ** –directriz $\underline{\mathbf{D}}_1$–en un punto situado a distancia $\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c_1}}\ \mathbf{(}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\sqrt{\mathbf{1+\gamma^2}}} - \mathbf{c_2)}$. La longitud de la generatriz resultante entre directrices será simplemente la distancia entre los

puntos **(a, φ, γ φ)** y **(0, 0, $\frac{1}{c_1}$ (φ – c_2))**, con **φ = c_1 u +c_2**. Todas estas dimensiones están representadas sobre la figura 21.

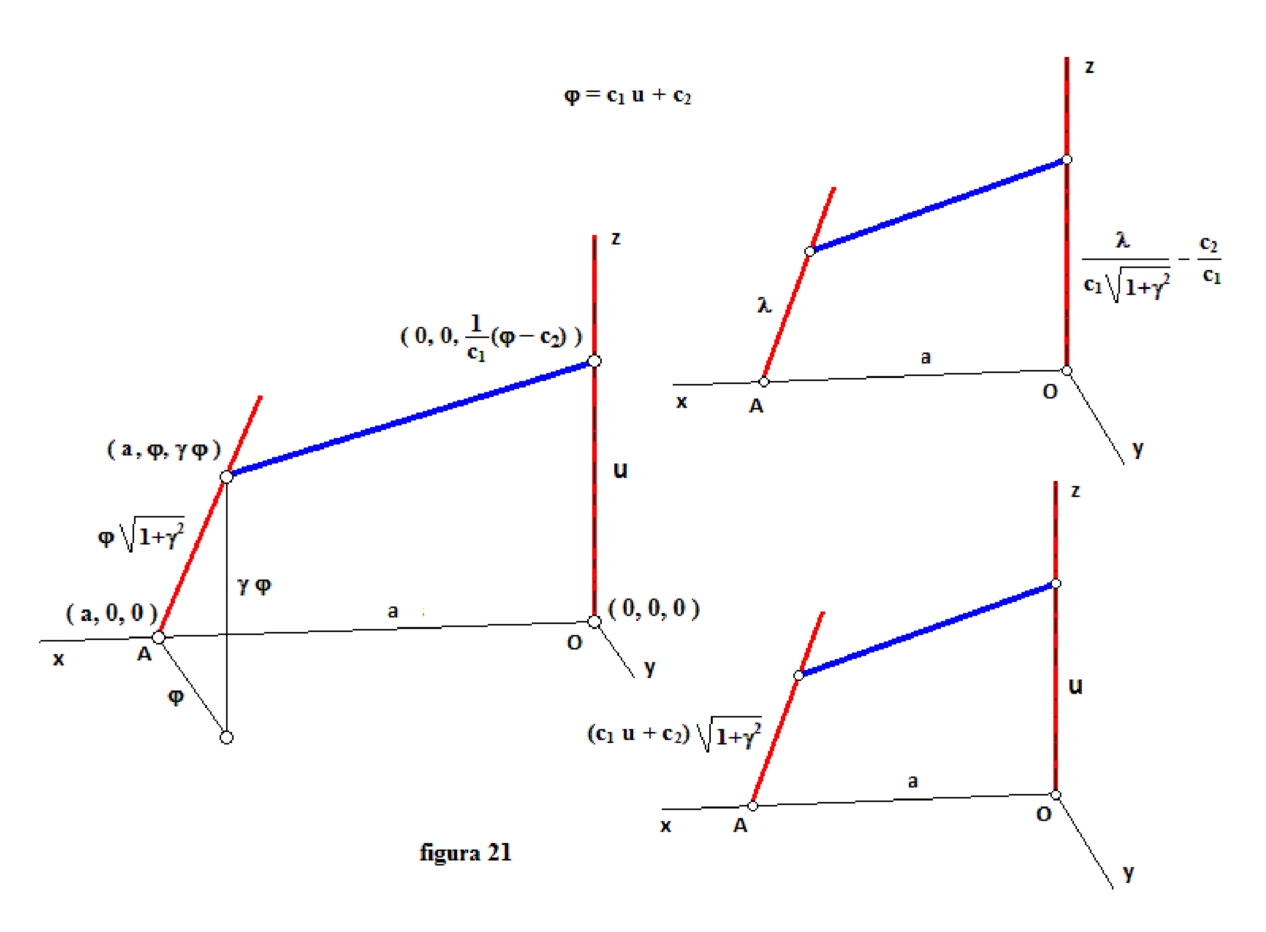


figura 21

Tomando, por ejemplo, el paraboloide **φ = 2 u –1** una de cuyas generatrices es la representada sobre la figura 21 y tomando una directriz $\underline{\mathbf{D}}_2$ que forme **45º** con su proyección sobre el plano **XOY** –la representada en la misma figura– cada unidad medida sobre esta última desde **A** se convierte en $\sqrt{2}$ **(≅ 1,414)** sobre el eje **OZ** desde el origen **O**. Con ambas directrices separadas sobre el eje **OX** una longitud **a = 1**, la longitud de la generatriz entre directrices entre ambos puntos será de ≅**4,5147**.

2.3.- Dos rectas que se cruzan y una colección de planos paralelos.

Como se sabe, un conoide es una superficie reglada engendrada por rectas que se apoyan en una recta y en otra curva cualquiera, permaneciendo paralelas a un plano denominado "director" del conoide. Trivialmente, este plano no puede ser paralelo a la recta y en caso de que la curva directriz sea plana tampoco puede ser paralelo al plano que la contiene. La directriz rectilínea se denomina eje del conoide.

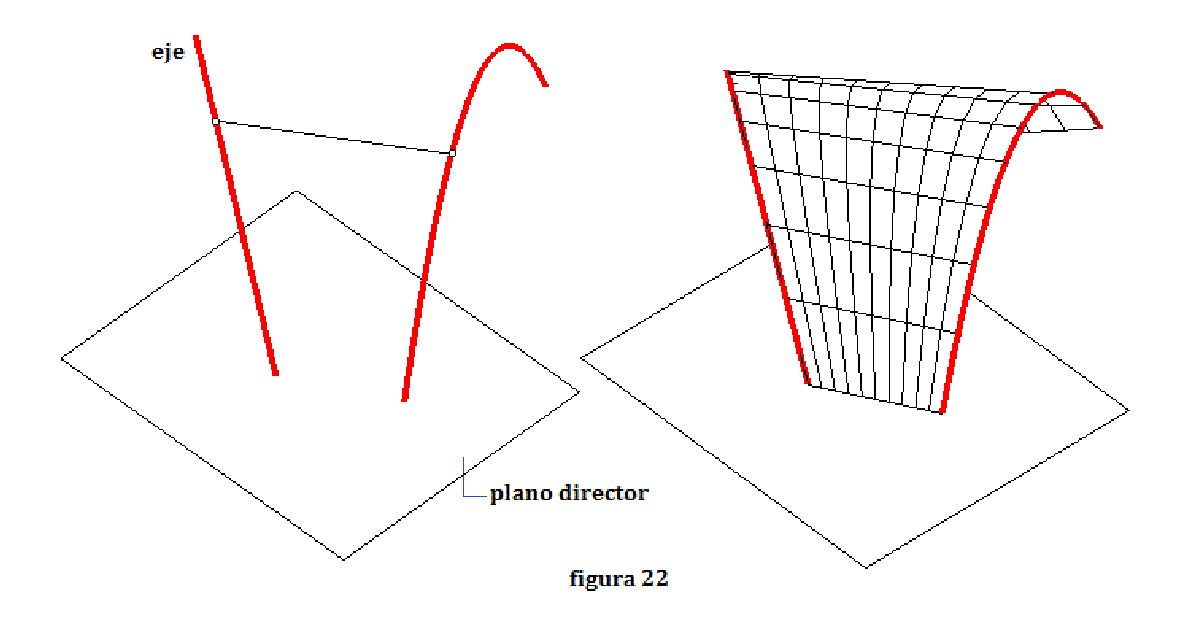


figura 22

Un esquema gráfico general de un conoide se muestra en la figura 22. Aquí estamos considerando el caso de dos directrices rectas así que podemos hablar de conoides con dos ejes –figura 23–.

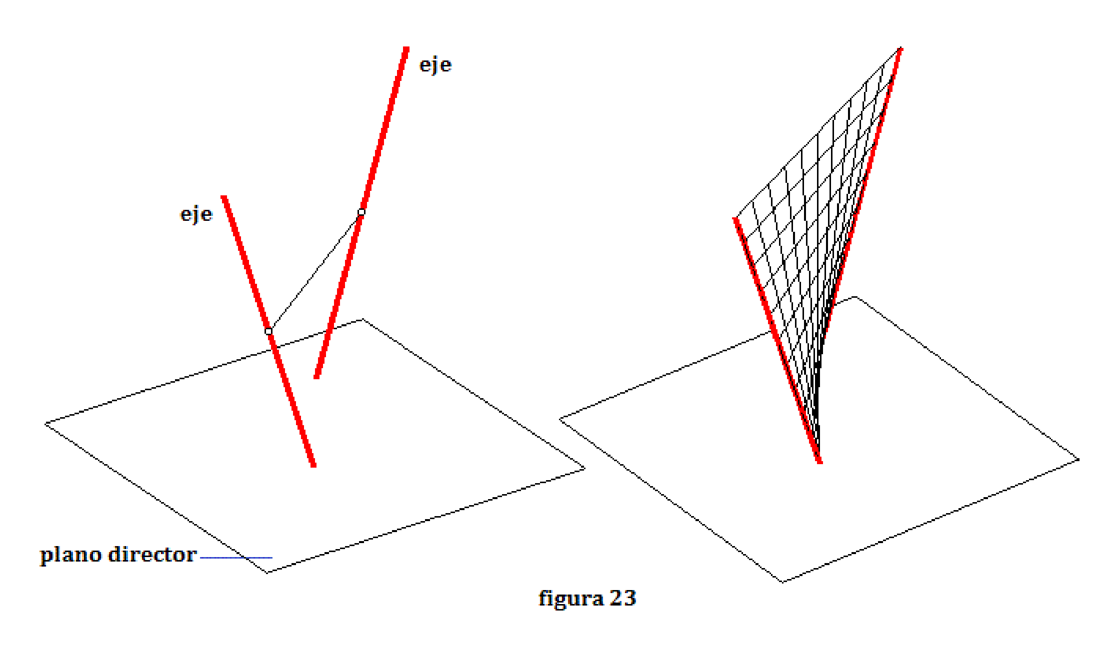


figura 23

El que el paraboloide hiperbólico sea un conoide resulta una de sus características esenciales a todos los efectos. Esto nos permite contemplar esta superficie como el conjunto de rectas generadas por la intersección de un haz de planos –paralelos al plano director– con las dos rectas no coplanarias elegidas como directrices. Esta manera de ver la superficie representa un método de "construcción" muy eficaz de la misma. En la figura 24 se representa gráficamente esta propuesta para la superficie de directrices **(0, 0, u)** y **(1, φ, φ)** y plano director **y + z + D = 0**.

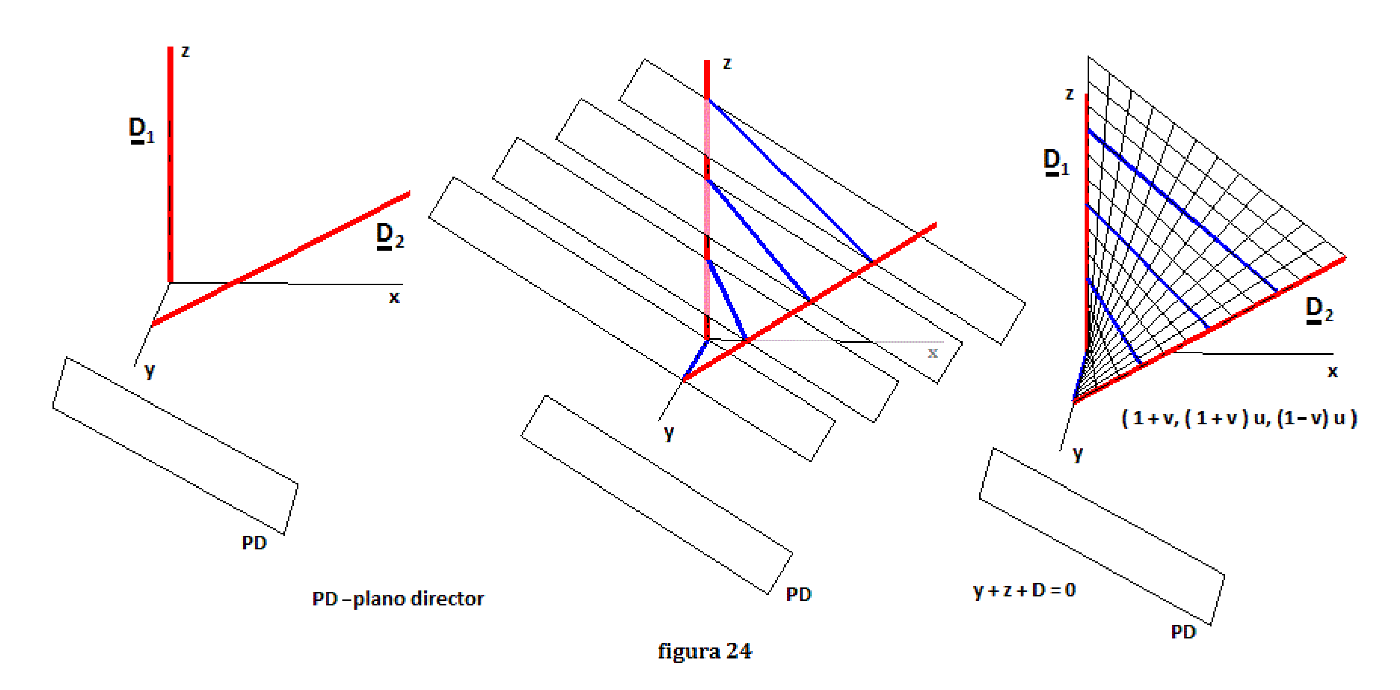


figura 24

Para el siguiente análisis, partimos de dos rectas que se cruzan sobre las que queremos construir el paraboloide. Aquí conservaremos la configuración de la figura 15 con las líneas directrices:

$$\underline{\mathbf{D}}_1(\mathbf{u}) = \{\ \mathbf{0,\ 0,u}\ \} \quad \mathbf{y} \quad \underline{\mathbf{D}}_2(\varphi) = \{\ \mathbf{a},\ \varphi,\ \gamma\ \varphi\ \}$$

El plano director elegido **A x + B y + C z + D = 0** no podrá ser paralelo a la $\underline{\mathbf{D}}_1$ por lo que **C≠ 0**, y tampoco a la $\underline{\mathbf{D}}_2$ con lo que **B + γ C ≠ 0**. En estas condiciones podrá generarse la superficie y las direcciones de las generatrices serán las del vector

$$\{\ \mathbf{a},\ \varphi, \gamma\ \varphi - \mathbf{u}\ \}$$

que deberá ser normal al vector característico del plano. De esta condición podemos obtener a relación:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{A\ a}}{\mathbf{C}} + \frac{\mathbf{B} + \gamma\ \mathbf{C}}{\mathbf{C}}\ \varphi$$

y de aquí, fijados **a** y **γ** se obtiene el conjunto de paraboloides:

$$\underline{\mathbf{f}}\ (\varphi,\ \mathbf{v},\ \mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}\ ) = \{\ \mathbf{a\ v},\ \varphi\ \mathbf{v},\ (\mathbf{1}-\mathbf{v})\ \frac{\mathbf{A\ a}}{\mathbf{C}} + (\ \frac{\mathbf{B} + \gamma\ \mathbf{C}}{\mathbf{C}} - \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}\ \mathbf{v}\ )\ \varphi\ \}$$

para los distintos parámetros del plano director **A**, **B**, **C**.

Fijados ahora los coeficientes **A**, **B**, **C**, las generatrices del paraboloide resultante se determinan particularizando los distintos valores de "**φ**" con lo lo que la generatriz queda ligada o referida al punto de corte con la directriz $\underline{\mathbf{D}}_2$, o bien, si se quiere, teniendo en cuenta la relación anterior entre los parámetros "**u**" y "**φ**", queda referida al punto de corte con el eje **OZ** que es la directriz $\underline{\mathbf{D}}_1$ –figura 25–.

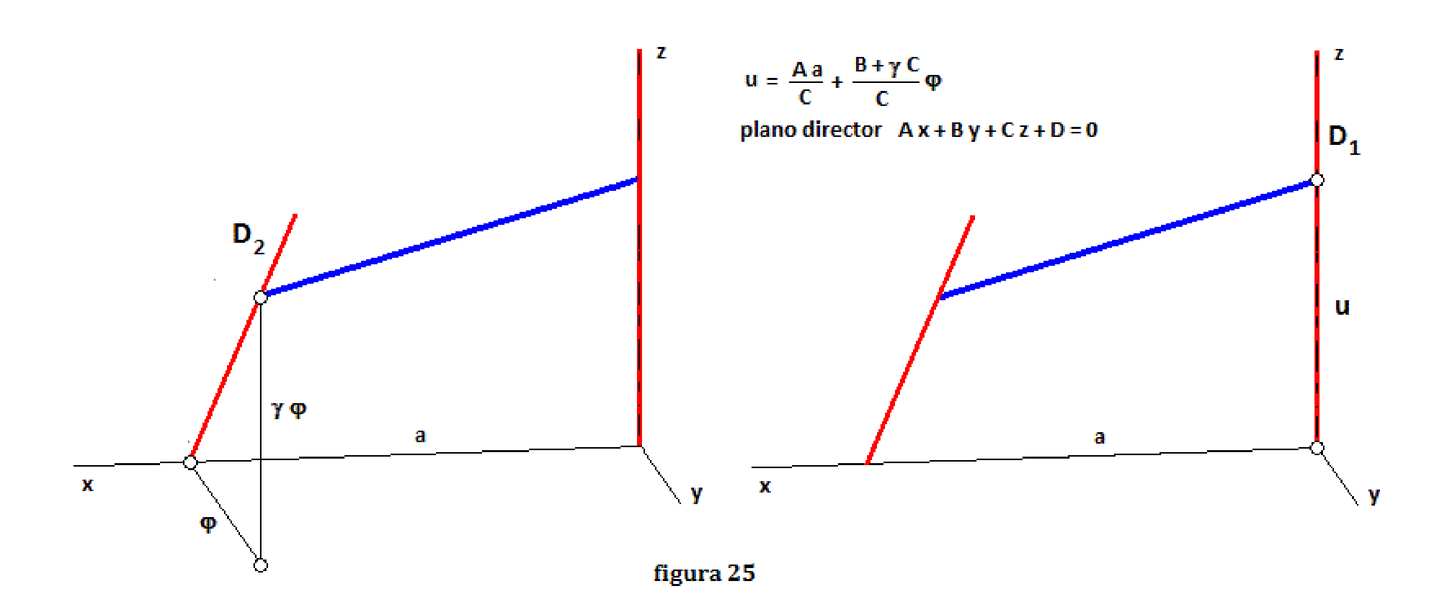


figura 25

Muy interesante desde el punto de vista constructivo resulta, sin embargo, asociar o ligar espacialmente cada generatriz al plano del haz paralelo al director que la contiene –figura 26–. Procederemos en lo siguiente a determinar dicho plano.

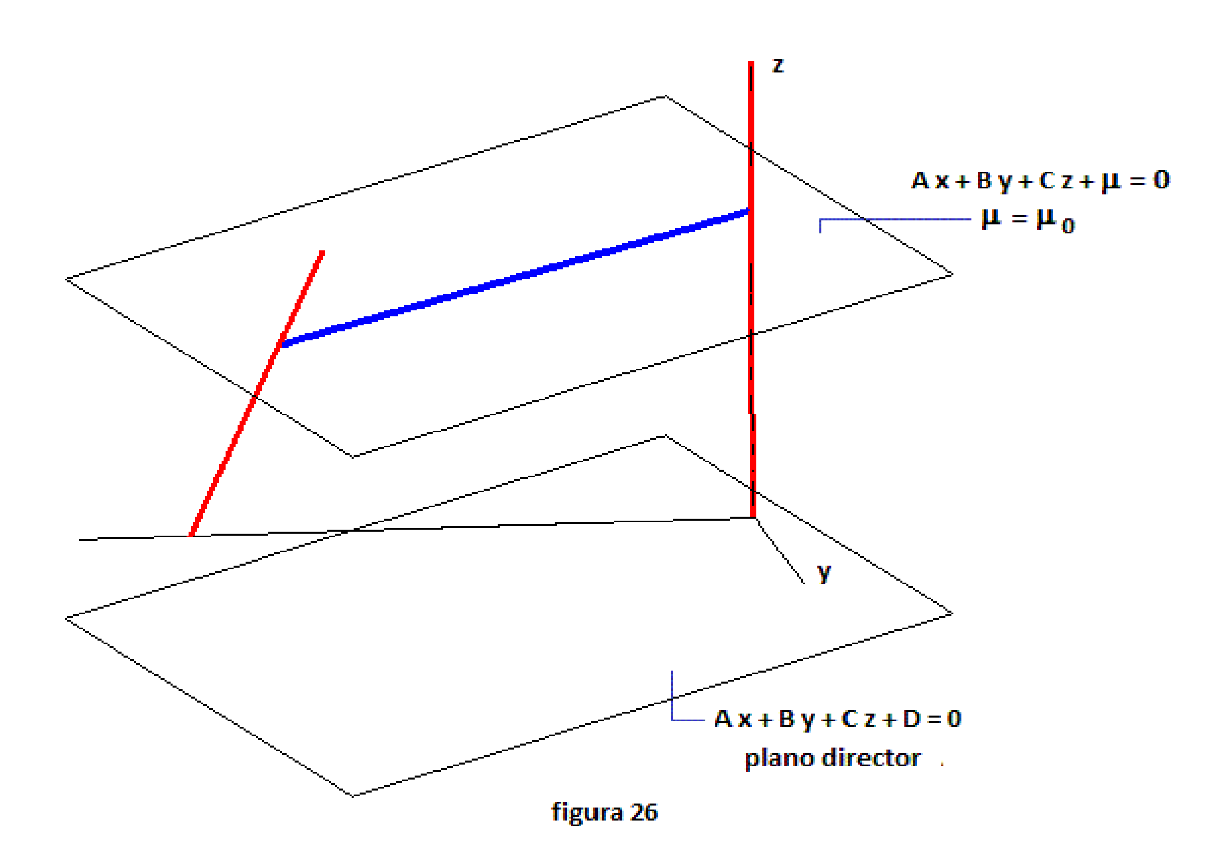


figura 26

Elegidos y fijados los coeficientes del plano director **A x + B y + C z + D = 0** teniendo en cuenta las restricciones **C≠ 0** y **B + γ C ≠ 0**, un plano genérico paralelo al director tendrá la forma: **A x + B y + C z + μ = 0**, siendo **μ** el parámetro del haz.

El corte de un plano "μ" de la familia con la directriz $\underline{\mathbf{D}}_1$ será el punto $\left(0, 0, -\frac{\mu}{C} \right)$ y el corte con la directriz $\underline{\mathbf{D}}_2$ será el $\left(a, -\frac{A\,a+\mu}{B+C\,\gamma}, -\gamma\,\frac{A\,a+\mu}{B+C\,\gamma} \right)$, así que para cada **μ**, las generatrices podrán venir expresadas por:

$$\left(0, 0, -\frac{\mu}{C} \right) + v \left\{ a, -\frac{A\,a+\mu}{B+C\,\gamma}, \frac{\mu}{C} - \gamma\,\frac{A\,a+\mu}{B+C\,\gamma} \right\}$$

y la propia superficie por:

$$\underline{g}\,(v, \mu) = \left\{ a\,v, -\frac{A\,a+\mu}{B+C\,\gamma}\,v, -\frac{1}{C}\,\mu - \gamma\,\frac{A\,a}{B+C\,\gamma}\,v + \left(\frac{1}{C} - \gamma\,\frac{1}{B+C\,\gamma} \right) \mu\,v \right\}$$

Si por ejemplo establecemos las directrices con **a = 1**, **γ = 1**, la familia de paraboloides para los distintos planos directores que pueden establecerse vendrá determinada por

$$\underline{f}\,(\varphi, v, A, B, C) = \left\{ v, \varphi\,v, (1-v)\,\frac{A}{C} + \left(\frac{B+C}{C} - \frac{B}{C}\,v \right) \varphi \right\}.$$

Elegido ahora como plano director admisible el plano **y + z = 0** (**C≠ 0**, **B + C ≠ 0**) la superficie queda determinada y representada paramétricamente por:

$$\underline{f}\,(\varphi, v, 0, 1, 1) = \{ v, \varphi\,v, (2 - v)\,\varphi \},$$

y cada una de sus generatrices se determina fijando **φ**. Así la generatriz que corta a la directriz $\underline{\mathbf{D}}_2$ en el punto **(1, 1, 1)** o bien, teniendo en cuenta que en este caso $u = \frac{A\,a}{C} + \frac{B+\gamma\,C}{C}\,\varphi = 2$, la que corta a la $\underline{\mathbf{D}}_1$ en el punto **(0, 0, 2)** será la:

$$\underline{f}\,(1, v, 0, 1, 1) = \{ v, v, 2 - v \}.$$

que se conserva en un plano paralelo al plano director **y + z + μ = 0** que pase por cualquiera de los dos puntos anteriores lo que determina inmediatamente el valor **μ = –2**. La superficie $\underline{\mathbf{g}}$**(v, μ)** particularizada para el caso **a = 1, γ = 1, A = 0, B = 1, C = 1**, será ahora la:

$$\underline{g}\,(v, \mu) = \left\{ v, -\frac{1}{2}\,\mu\,v, -\frac{1}{C}\,\mu + \frac{1}{2}\,\mu\,v \right\},$$

y la generatriz contenida en el plano **μ = – 2** será directamente la $\underline{\mathbf{g}}$ **(v, –2) = { v, v, 2 – v }**.

2.4.- El caso γ = 0.

Dentro de las aplicaciones del paraboloide y desde el punto de vista constructivo resulta particularmente interesante el caso en que las dos directrices siendo no coplanarias tengan sus direcciones ortogonales –figura 27–. Esta transición curva, alabeada, entre rectas que se cruzan con direcciones perpendiculares ha sido, de una u otra manera, la más utilizada ampliamente en el campo de la construcción y el diseño.

figura 27

Este caso se corresponde con el valor nulo de γ, y el conjunto de paraboloides podremos representarlos mediante la parametrización propia:

$$\underline{D}_1 + v\ \underline{d} = (0, 0, u) + v\{ a,\ c_1 u + c_2,\ -u\}$$

en los que:

$$\dot{\underline{D}}_1 \times \underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & c_1 u + c_2 & -u \end{vmatrix} = \{-c_1 u - c_2,\ a,\ 0\}$$

$$\dot{\underline{d}} \times \underline{d} = \begin{vmatrix} 0 & c_1 & -1 \\ a & c_1 u + c_2 & -u \end{vmatrix} = \{c_2,\ -a,\ -a\, c_1\},$$

así que sus puntos centrales se obtendrán para valores $v = v_c = \dfrac{-c_1 c_2 u - c_2^2 - a^2}{c_2^2 + a^2 + a^2 c_1^2}$,

y las líneas de estricción serán por lo tanto las parábolas:

$$\underline{w}(u, c_1, c_2) = \left(\frac{(c_1 c_2 u + c_2^2 + a^2)\, a}{a^2 + c_1^2 a^2 + c_2^2}, \frac{(c_1 c_2 u + c_2^2 + a^2)\ (c_1 u + c_2)}{a^2 + c_1^2 a^2 + c_2^2}, \frac{c_1 u (c_1 a^2 - c_2 u)}{a^2 + c_1^2 a^2 + c_2^2} \right)$$

que para la función $\varphi = c_1 u$, se convierten en las rectas:

$$\underline{w}(u, c_1) = \left(\frac{a}{1 + c_1^2}, \frac{c_1 u}{1 + c_1^2}, \frac{c_1^2 u}{1 + c_1^2} \right),$$

de dirección **{0, 1, c_1}** y que cortan al eje **OX** a distancias $\dfrac{a}{1 + c_1^2}$ del origen.

Cuando $\gamma = 0$, con $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, las unidades y dimensiones de replanteo medidas sobre las directrices $\underline{D}_1$ y $\underline{D}_2$, desde los puntos **O** y **A** respectivamente, se convierten en:

λ sobre $\underline{\mathbf{D}}_2$ se corresponde con $\frac{\mathbf{1}}{c_1}$ **(λ – c$_2$)** sobre $\underline{\mathbf{D}}_1$

y

u sobre $\underline{\mathbf{D}}_1$ se corresponde con $\mathbf{c_1}$ **u** +$\mathbf{c_2}$ sobre $\underline{\mathbf{D}}_2$

En el caso $\mathbf{c_2} = \mathbf{0}$ estas dimensiones se convierten en un simple factor de escala:

λ sobre $\underline{\mathbf{D}}_2$ se corresponde con $\frac{\lambda}{c_1}$ sobre $\underline{\mathbf{D}}_1$

y

u sobre $\underline{\mathbf{D}}_1$ se corresponde con $\mathbf{c_1}$ **u** sobre $\underline{\mathbf{D}}_2$

En la figura 28 se representan esquemáticamente las condiciones de replanteo relativas para los paraboloides **φ = u – 1** y **φ = 2 u** y el trazado en cada uno de ellos de una de sus generatrices. Se muestran, además, sus dimensiones complementarias para el caso **a = 1**.

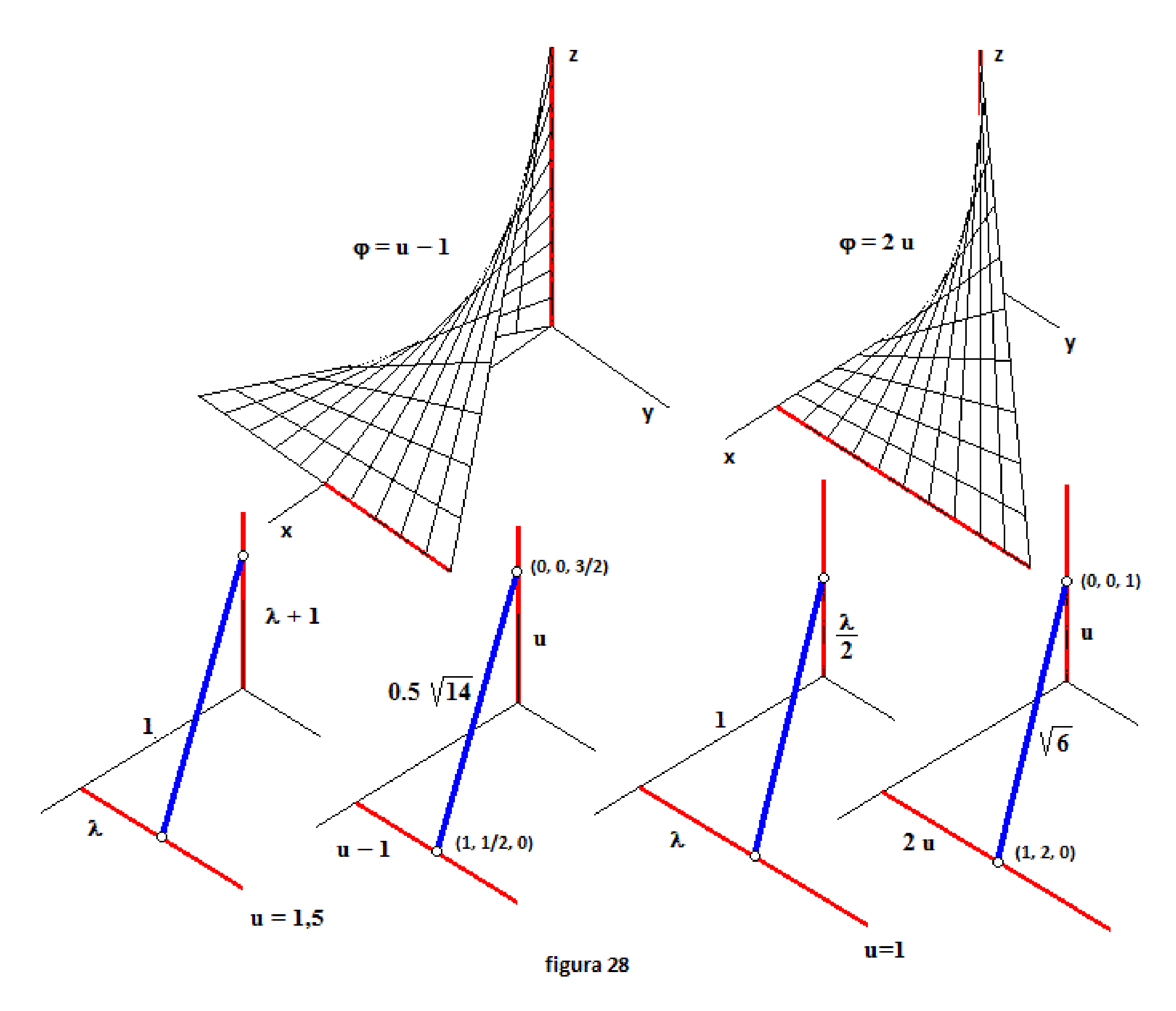


figura 28

Es significativo el caso en que siendo $\mathbf{c_2} = \mathbf{0}$, sea $\mathbf{c_1} = \mathbf{1}$, que es la hoja correspondiente a la función **φ = u**. En este caso la línea de estricción de la superficie es la recta:

$$\underline{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) = (\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{2}})$$

que corta al eje **OX** en el punto $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}$. Esta línea de estricción queda situada en el punto medio de cada generatriz entre las directrices. Las longitudes entre cada dos generatrices sobre las directrices resultan ser idénticas; esto simplifica extraordinariamente la construcción de estas hojas ya que basta medir la misma distancia sobre cada directriz desde el origen **O** de $\underline{\mathbf{D}}_1$ y **A** de $\underline{\mathbf{D}}_2$ para trazar cada una de las generatrices como se muestra en la figura 29.

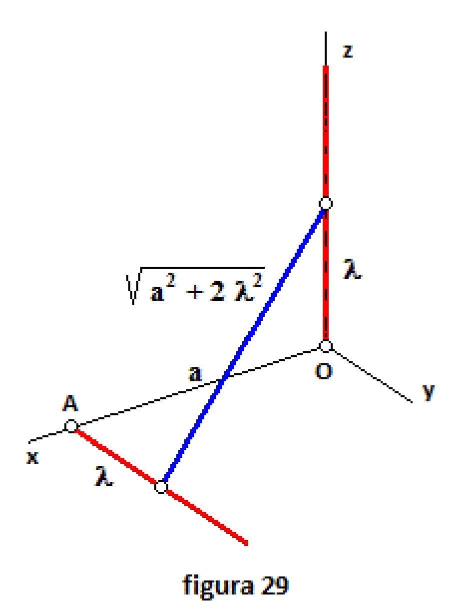


figura 29

En la figura 30 se representan uno de tales fragmentos y su línea de estricción y en la figura 31 se introducen sobre este fragmento los primeros acoplamientos de estas hojas con otras iguales y algunas condiciones de simetría muy básicas. Se pretende mostrar las posibilidades formales de este tipo de superficies y su adaptabilidad para formar agrupaciones de cierto interés en lo referente a la generación de formas y, en general, en el ámbito del diseño. De esto se hablará en el **§ 4** y siguientes**.**

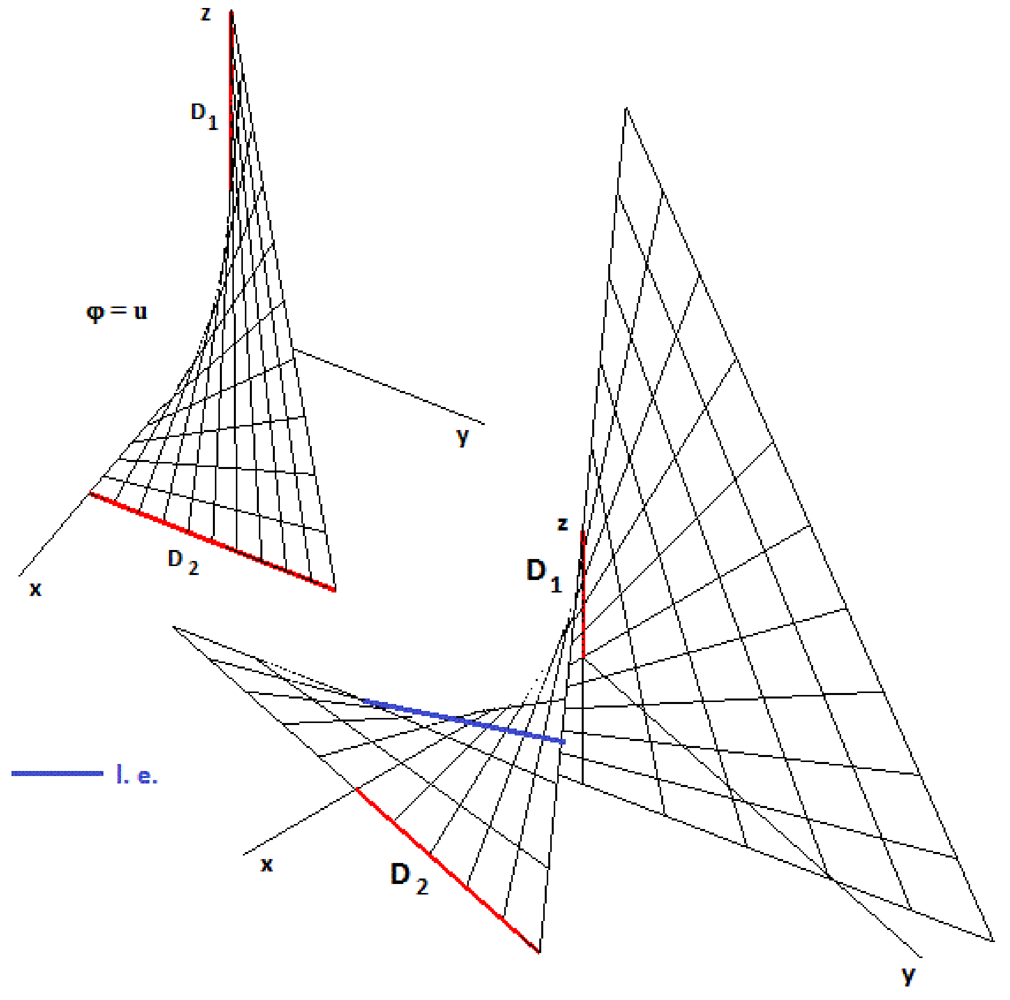


figura 30

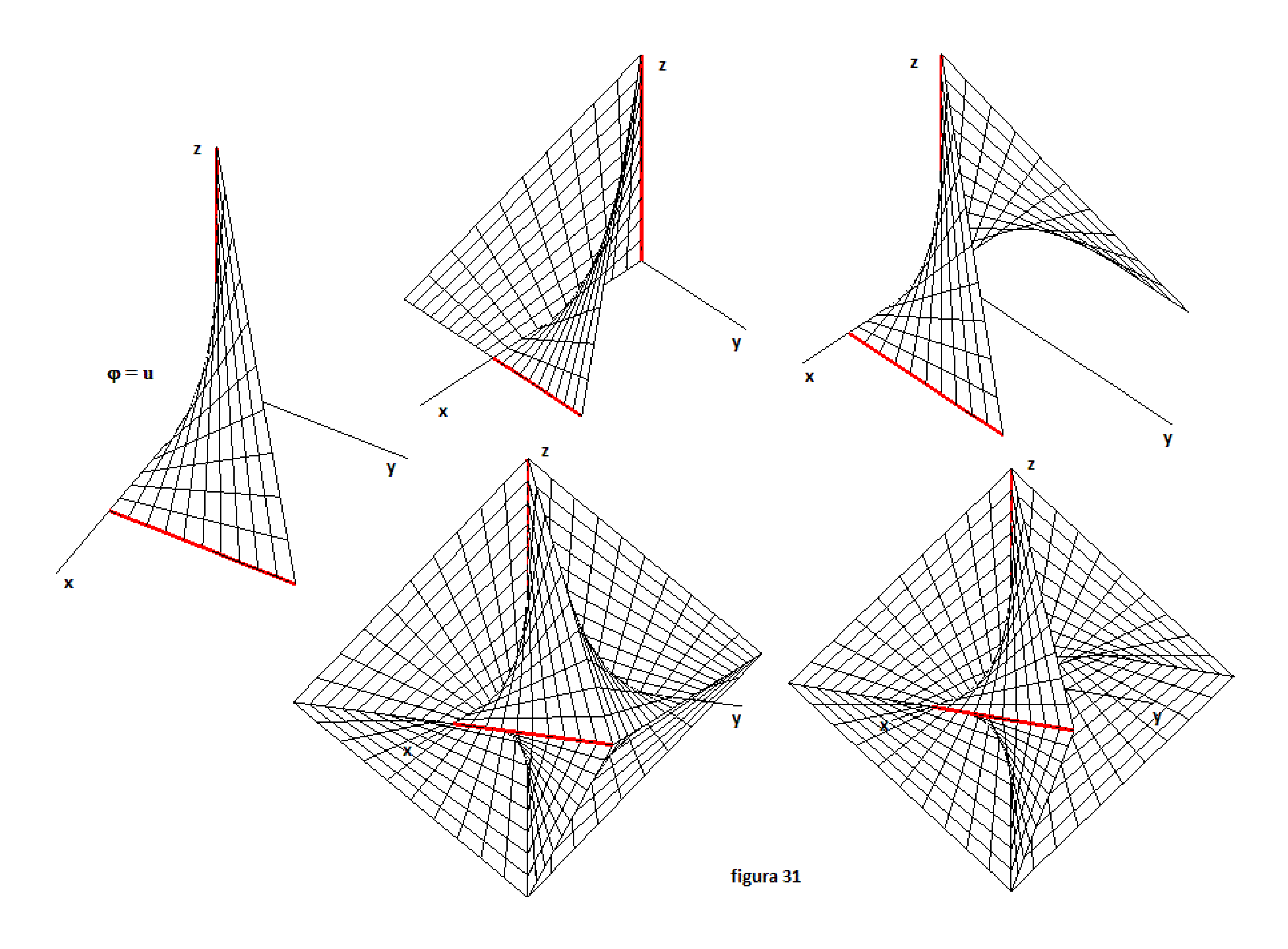


figura 31

Finalmente, cabe citar que el conjunto de paraboloides que pueden engendrarse en estas condiciones para los distintos parámetros del plano director **A**, **B**, **C**, vendrán representados por:

$$\underline{\mathbf{f}}\ (\varphi, v, A, B, C) = \{\ a\, v,\ \varphi\, v,\ (1 - v)\ \frac{A\, a}{C} + \frac{B}{C}\,(1 - v)\ \ \varphi\ \}.$$

§ 3.- Una superficie generada con tres directrices rectas.

En el epígrafe anterior **§2** hemos venido considerando la configuración de dos rectas no coplanarias –no se cortan, no son paralelas– utilizadas como directrices. Estas son dos rectas $\underline{\mathbf{D}}_1$ y $\underline{\mathbf{D}}_2$ que cortan al eje **OX** respectivamente en los puntos **O (0, 0, 0)** y **A (a, 0, 0)** estando contenidas en planos perpendiculares a este eje. Esta es una disposición genérica –sin ninguna restricción salvo por su posición– para cualesquiera dos rectas que se cruzan en el espacio ordinario$\mathfrak{R}_3$. Las rectas pueden ser representadas de forma paramétrica por:

$$\underline{\mathbf{D}}_1\ (\mathbf{0, 0, \lambda}) \quad \text{y} \quad \underline{\mathbf{D}}_2\ (\mathbf{0, \mu, \alpha\, \mu}) \quad \text{con } \alpha \text{ finito}$$

Añadamos una tercera directriz rectilínea a esta disposición. Esta tercera directriz $\underline{\mathbf{D}}_3$ la haremos pasar por el punto **B (b, 0, 0)** con $\mathbf{b \neq a \neq 0}$. En lo referente a la posición relativa de esta tercera recta respecto de las anteriores encontramos dos configuraciones básicas. En la primera de ellas $\underline{\mathbf{D}}_3$ siendo no coplanaria con ninguna de ellas corta a los dos planos paralelos que las contienen. En la segunda manteniéndose no coplanaria con ninguna de las otras se conserva en un plano paralelo a los que contienen a $\underline{\mathbf{D}}_1$ y $\underline{\mathbf{D}}_2$. Ambas posiciones relativas pueden verse sobre la figura 32.

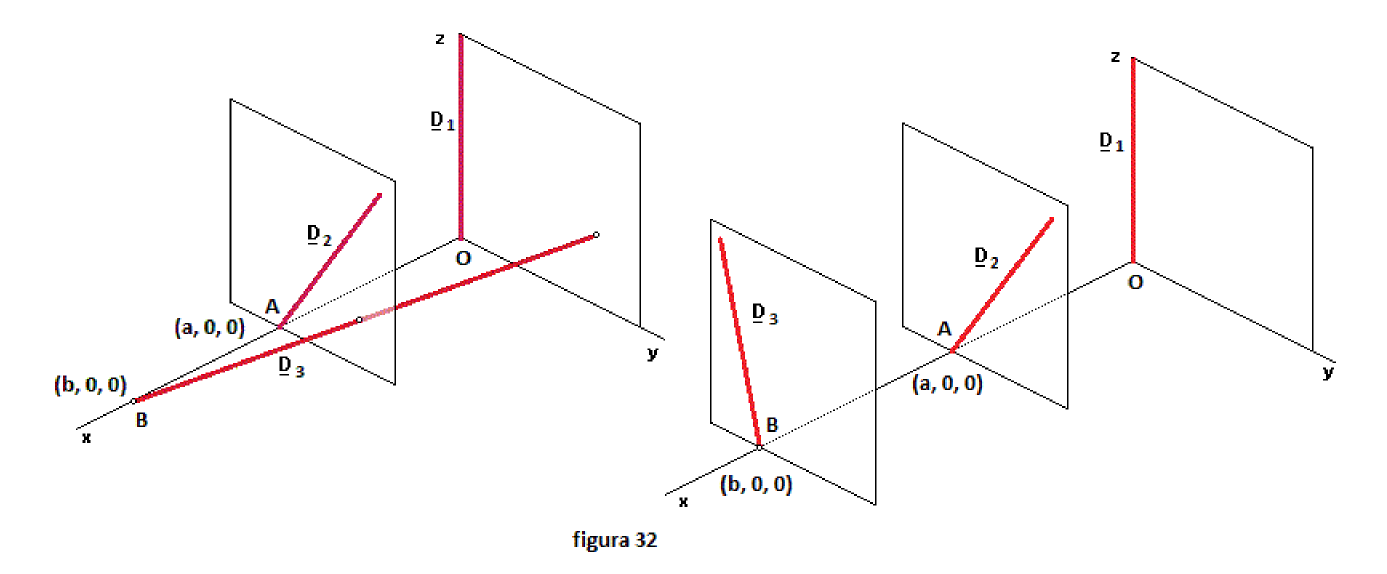


figura 32

Consideramos ahora las superficies regladas que se apoyen en las tres directrices simultáneamente. La primera de las dos configuraciones nos lleva directamente al hiperboloide de una hoja que no es aquí objeto de nuestra atención. Examinaremos la segunda disposición de las tres rectas directrices. La tercera puede parametrizarse por:

$$\underline{\mathbf{D}}_3\ (\mathbf{b, \delta, \beta\, \delta}) \quad \textbf{siendo } \beta \neq \alpha \quad (\mathbf{b \neq a \neq 0})$$

En estas condiciones, para que una generatriz se apoye en las tres directrices simultáneamente deberá verificarse que las tres direcciones:

$$\{\mathbf{a, \mu, \alpha\, \mu - \lambda}\} \quad \{\mathbf{b, \delta, \beta\, \delta - \lambda}\} \quad \{\mathbf{b - a, \delta - \mu, \beta\, \delta - \alpha\, \mu}\}$$

sean equivalentes. El sistema resultante es compatible y con las relaciones:

$$\mu = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\,\delta,\ \ \lambda = \frac{\mathbf{a}\,(\beta - \alpha)}{\mathbf{a-b}}\,\delta,$$

las tres direcciones anteriores son equivalentes a la $\{\ \mathbf{b},\ \delta,\ \frac{\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}}{\mathbf{a-b}}\,\delta\ \}$ por lo que una parametrización propia de la superficie buscada podrá escribirse:

$$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u, v}) = (\ \mathbf{b, u}, \beta\,\mathbf{u}\ ) + \mathbf{v}\,\{\ \mathbf{b}, \delta, \frac{\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}}{\mathbf{a-b}}\,\delta\ \} = (\ (1+\mathbf{v})\,\mathbf{b}, (1+\mathbf{v})\,\mathbf{u}, (\beta + \frac{\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}}{\mathbf{a-b}}\,\mathbf{v})\,\mathbf{u}\ )$$

Las generatrices resultan ser todas paralelas al plano

$$-\frac{\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}}{\mathbf{a-b}}\,\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0},$$

así que la superficie es un conoide.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y que $\beta \neq \alpha$, esta superficie carece de puntos singulares y no existen generatrices de puntos parabólicos. Los vectores

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{uu}} = \frac{\partial^2\,\underline{\underline{\mathbf{r}}}}{\partial\,\mathbf{u}^2} = \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{vv}} = \frac{\partial^2\,\underline{\underline{\mathbf{r}}}}{\partial\,\mathbf{v}^2}$$

son nulos, por lo que las líneas asintóticas son las rectas coordenadas:

$$(\ \mathbf{b} + \mathbf{b\,v}, \varsigma + \varsigma\,\mathbf{v}, \beta\,\varsigma\ +\ \frac{\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}}{\mathbf{a-b}}\,\varsigma\,\mathbf{v}\ )\ \ \text{y}\ \ (\ (1+\zeta)\,\mathbf{b}, (1+\zeta)\,\mathbf{u}, (\beta + \frac{\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}}{\mathbf{a-b}}\,\zeta)\,\mathbf{u}\ ),$$

así que se trata de un conjunto de paraboloides hiperbólicos que pueden adaptarse a las posiciones de las tres directrices $\underline{\mathbf{D}}_1$, $\underline{\mathbf{D}}_2$ y $\underline{\mathbf{D}}_3$ a través de los valores α, β, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Este conjunto queda más propiamente descrito en la forma:

$$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u, v}, \alpha, \beta, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\ (1+\mathbf{v})\,\mathbf{b}, (1+\mathbf{v})\,\mathbf{u}, (\beta + \frac{\alpha\,\mathbf{a} - \beta\,\mathbf{b}}{\mathbf{a-b}}\,\mathbf{v})\,\mathbf{u}\ ).$$

Para mostrar la versatilidad de estas superficies y su adaptabilidad, en la figura 33 se muestran tres sencillos ejemplos sobre los valores comunes $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = 2}$, siendo las directrices las determinadas por las parejas de valores:

$$\alpha = 0, \beta = 1 \quad ; \quad \alpha = 1, \beta = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \beta = -1$$

que se corresponden con las parametrizaciones de los paraboloides:

$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u, v, 0, 1, 1, 2}) = (\ \mathbf{2 + 2\,v}, (\mathbf{1+v})\,\mathbf{u}, (\mathbf{1 + 2\,v})\,\mathbf{u}\ )$,
$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u, v, 1, 0, 1, 2}) = (\ \mathbf{2 + 2\,v}, (\mathbf{1+v})\,\mathbf{u}, -\mathbf{v\,u}\ )$,
$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u, v, 1, -1, 1, 2}) = (\ \mathbf{2 + 2\,v}, (\mathbf{1+v})\,\mathbf{u}, (-\mathbf{1} - \mathbf{3\,v})\,\mathbf{u}\ )$.

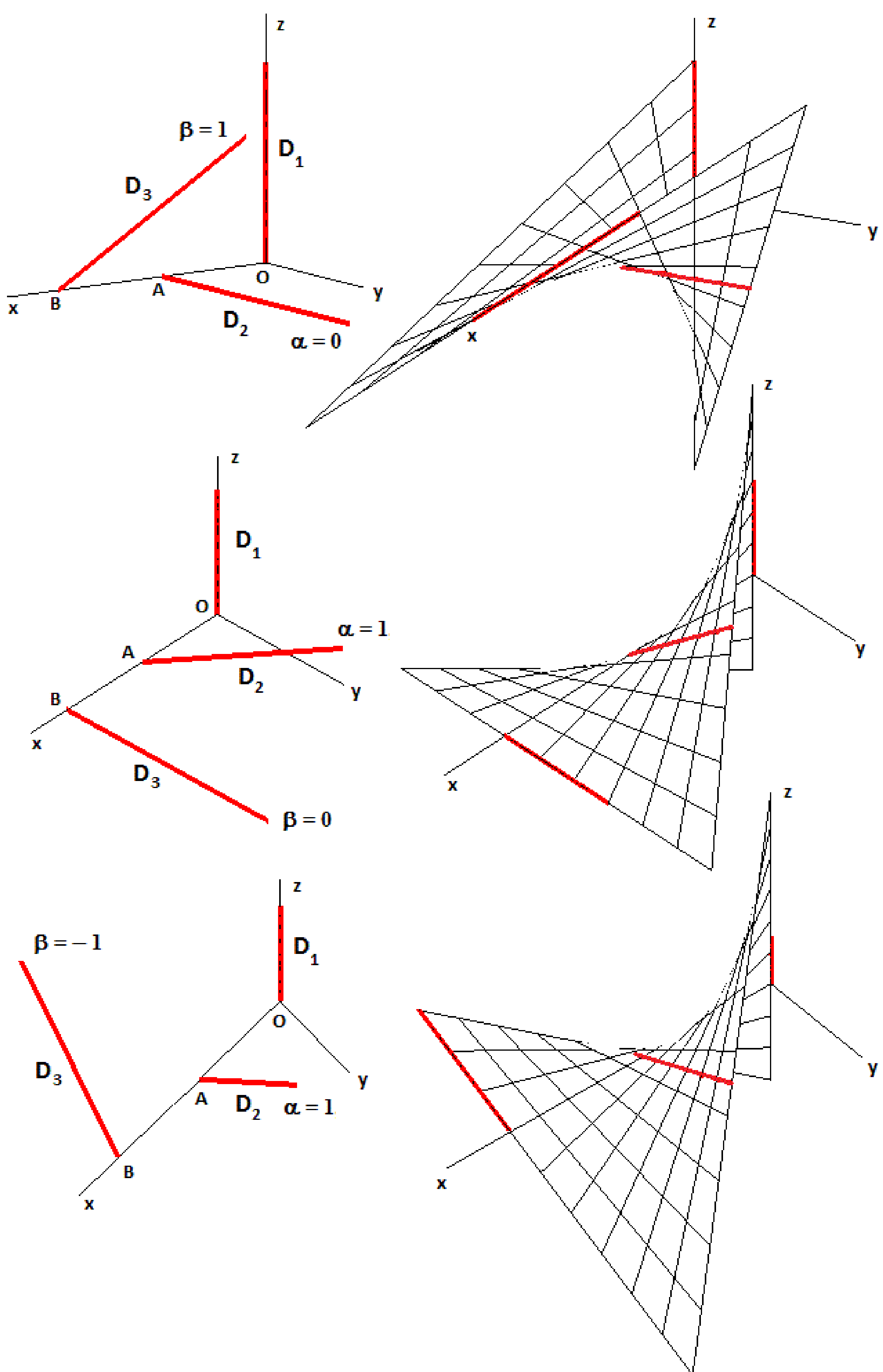

z
D1
β = 1
D3
O
y
x
B
A
D2
α = 0
z
y
x
z
y
x
z
D1
O
α = 1
A
D2
y
B
x
D3
β = 0
z
β = −1
D1
O
D3
y
A
D2
α = 1
B
x
z
y
x

figura 33

§ 4.- Un cuadrilátero alabeado.

4.1.- Alternativas y replanteos en la delimitación de una hoja de paraboloide.

Uniendo adecuadamente cuatro puntos **M**, **N**, **P**, **Q** no coplanarios en $\Re_3$ podemos obtener un cuadrilátero no plano o, si se quiere, un cuadrilátero "alabeado". Basta considerar los puntos dados como vértices y los lados **M-N**, **N-P**, **P-Q** y **Q-M** para obtener uno de los posibles cuadriláteros. Existe un segundo cuadrilátero que se forma con los lados **M-P**, **P-N**, **N-Q** y **Q-M** y un tercero formado con los lados **M-P**, **P-Q**, **Q-N**, y **N-M**, según se muestra en la figura 34.

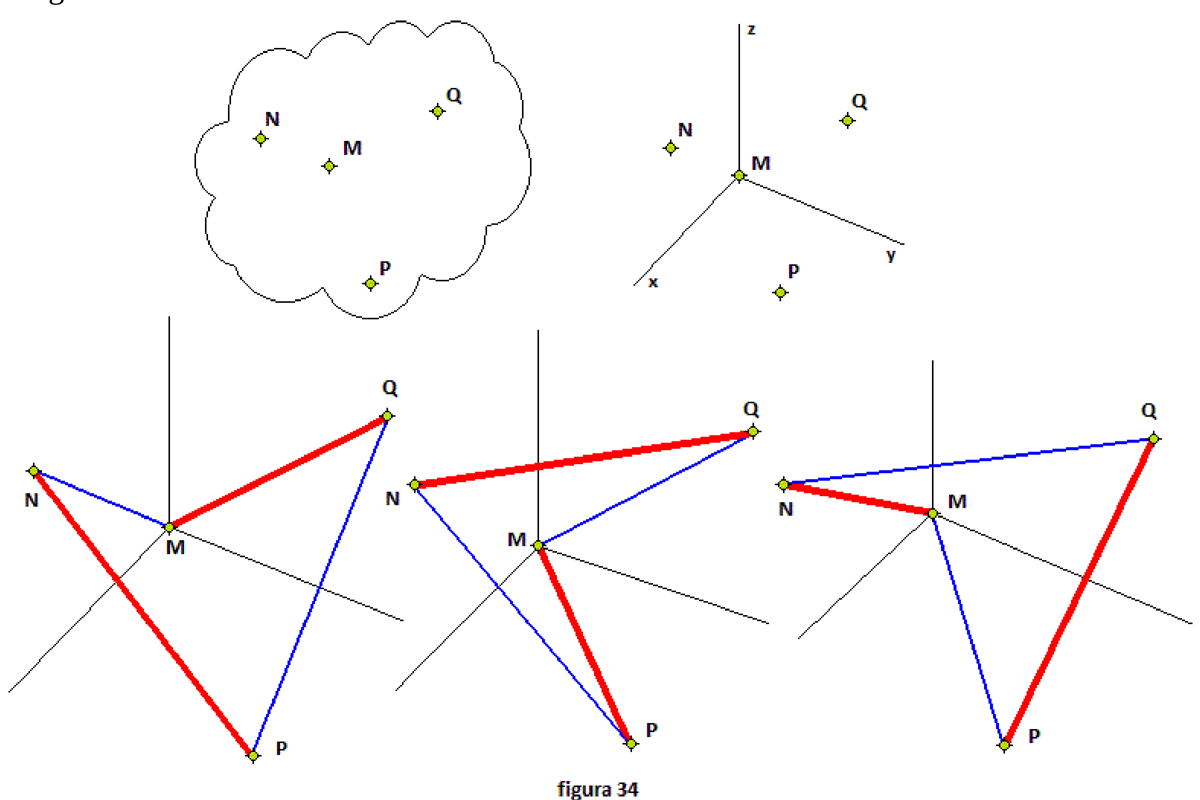


figura 34

Para resolver el problema de hacer pasar por uno cualquiera de los cuadriláteros una hoja de paraboloide delimitada por sus cuatro lados podemos utilizar todo lo visto en los epígrafes anteriores. Siempre podemos, por ejemplo, situar los cuatro vértices de manera que dos de ellos estén sobre el eje **OZ** y que el plano **YOZ** sea el paralelo a la recta que une estos dos vértices y a la que une los otros dos. Si para simplificar la disposición, admitimos ahora que el tercero esté sobre una recta perpendicular a dicho plano –como eje **OX**–, entonces tenemos la configuración ya estudiada a lo largo del **§ 2** y representada en la figura 35 a. No es una disposición con carácter tan general como la de las dos rectas que se cruzan pero nos facilita extraordinariamente los cálculos y los resultados que obtenemos pueden extenderse sin dificultad a cualquier otra configuración arbitraria.

Tal y como se muestra en la figura 35 a, los puntos **O≡ (0, 0, 0)** y **B≡ (0, 0, b)** son dos puntos arbitrarios del eje **OZ** que resulta ser la directriz $\underline{\mathbf{D}}_1$, en tanto los puntos **A≡ (a, 0, 0)** y **C≡ (a, c, γ c)** lo son de la directriz $\underline{\mathbf{D}}_2$ quedando definido este cuadrilátero con los vértices **O, B, C, A**,. La generación del paraboloide se hace con las dos directrices habituales $\underline{\mathbf{D}}_1$ y

$\underline{D}_2$ que contienen los lados **O-B** y **C-A** respectivamente. Para delimitar el cuadrilátero bastará que el paraboloide contenga además las rectas **B-C** y **O-A** y esta inclusión determina en realidad el plano director del conoide cuyo vector característico debe de ser el producto vectorial de sus direcciones. Es decir: se trata de sumergir los bordes **B-C** y **O-A** en dos planos paralelos que pertenecen al haz de planos paralelos al director como se vio en el **2.3** del **§ 2** y cuya gráfica se muestra en la figura 35 b.

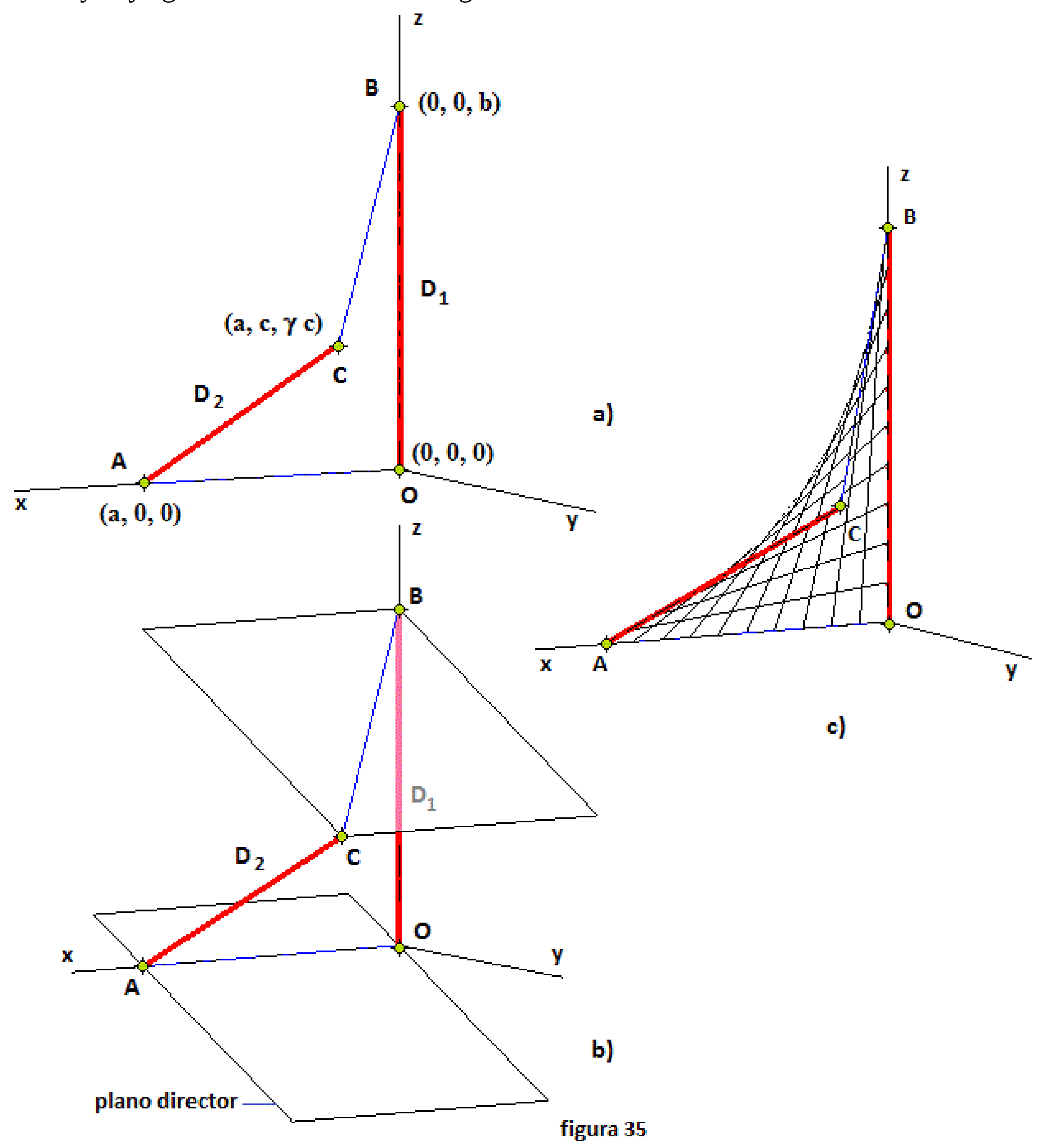


figura 35

Las dos direcciones de las rectas **B-C** y **O-A** resultan ser:

$$\{\, a, c, \gamma\, c - b \,\} \;\; y \;\; \{\, a, 0, 0 \,\}$$

y su producto vectorial es el vector **{0, a (γ c – b), – a}** que determinan los coeficientes del plano director por lo que puede utilizarse, si se quiere, la fórmula obtenida en el **2.3** en la que **A = 0, B = a (γ c – b) y C = – a**, y que da como resultado el paraboloide:

$$\left(a\,v,\ \varphi\,v,\ \frac{b}{c}\ \varphi + \left(\gamma - \frac{b}{c}\right) \varphi\,v \right)$$

que es el que se muestra en l figura 35 c.

Es fácil comprobar que el paraboloide engendrado por rectas que se apoyan en las directrices que contienen los segmentos **B-C** y **O-A** y cuyos bordes son los O-B y A-C es el mismo hallado anteriormente por lo que en un cuadrilátero alabeado definido por cuatro vértices no coplanarios es indiferente tomar cualquiera de los dos pares de lados opuestos como directrices en tanto los otros dos determinan el plano director. Estos resultados son generales para cualquier configuración de cuatro puntos no coplanarios en $\mathfrak{R}_3$ independientemente de su posición. Esta circunstancia es totalmente independiente de que cuatro puntos arbitrarios no coplanarios puedan determinar distintos paraboloides hiperbólicos. Teniendo en cuenta que en cada configuración de cuatro puntos no coplanarios es indiferente el par de lados puestos que se tomen como directrices, las tres hojas de los "cuadriláteros alabeados" obtenidos siguen el esquema representado en la figura 36 donde las líneas gruesas son las tomadas como directrices en cada caso.

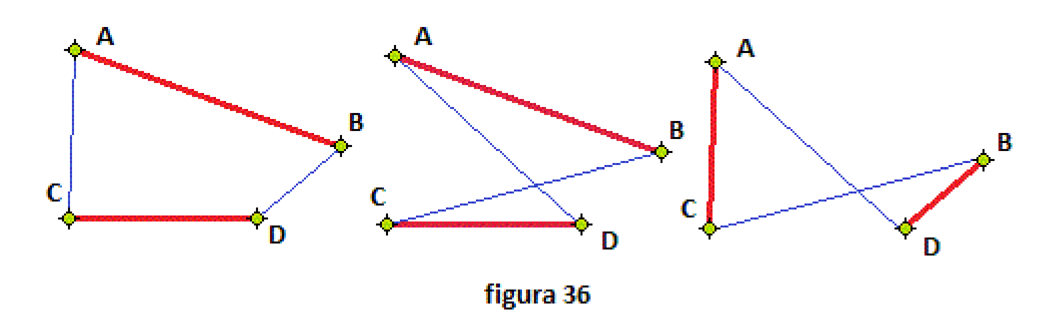


figura 36

Disponiendo de la parametrización del paraboloide que llena el cuadrilátero **O-B-C-A** escrita con la recta que une los puntos **A≡ (a, 0, 0)** y **C≡ (a, c, γ c)** tomados como directriz, dividamos ahora la longitud del lado **A-C** en "**n**" unidades o partes iguales –**n**, entero– que determina "**n–1**" puntos interiores que se corresponden proporcionalmente con la división del parámetro **φ** en **n** partes iguales siendo la longitud de cada parte $\frac{c}{n}$ –figura 37 a–. Cada punto interior tiene de coordenadas $\left(a,\ k\frac{c}{n},\ \gamma\ k\ \frac{c}{n}\right)$ con **k= 1, 2, 3…n-1**. Las generatrices que unen dos puntos consecutivos para "**k**" y "**k+1**" cortan a la directriz $\underline{D}_2$ –eje **OZ**– en los puntos:

$$\left(0,\ 0,\ k\ \frac{b}{n} \right)\ \text{y}\ \left(0,\ 0,\ (k+1)\frac{b}{n} \right),$$

cuya longitud es trivialmente $\frac{b}{n}$, o sea: la longitud del lado opuesto **O-B** dividido en "**n**" partes. El mismo resultado obtenemos si dividimos en un número de partes iguales los otros dos lados del cuadrilátero –figura 37 b–. Este resultado es, asimismo, generalizable a cualquier cuadrilátero alabeado en cualquier posición.

Resulta de todo ello que se pueden trazar las generatrices del paraboloide sin más que dividir en partes iguales cada uno de los dos lados opuestos del cuadrilátero y unir los extremos correspondientes a cada una de las partes como se muestra en la figura 38. Es de esta forma tan simple como se replantearon constructivamente los paraboloides más significativos que fueron utilizados en arquitectura e ingeniería a partir de la primera mitad del siglo XX.

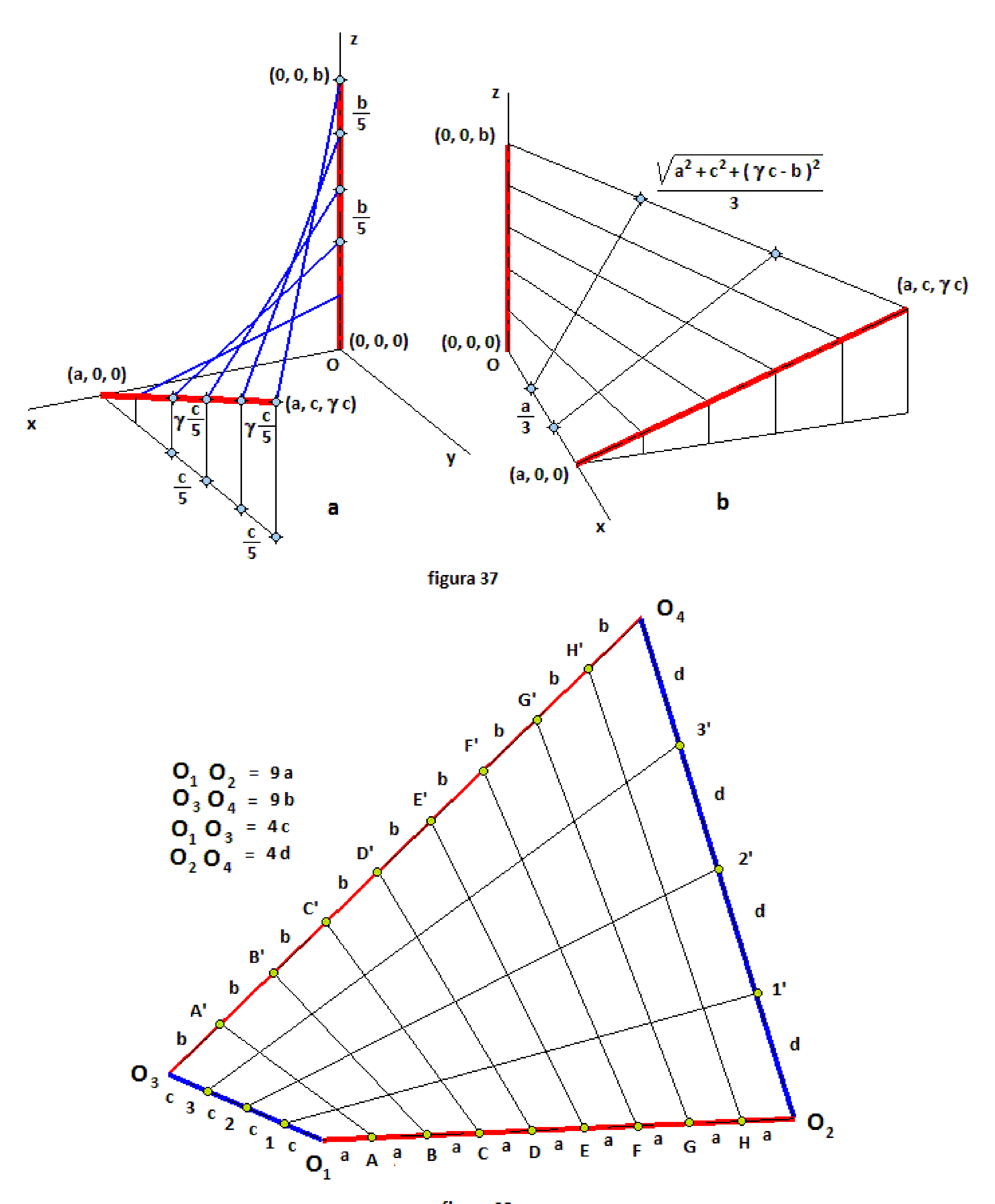


figura 37

figura 38

Para ilustrar el procedimiento en un caso general, mostramos un ejemplo como es el de hallar las hojas de paraboloide que constituyen los posibles "cuadriláteros alabeados" de vértices:

A (1, 2, 2) B (1, 0, 1) C (2, 1, 0) D (–1, 1, 1)

que se representa en la figura 39 en la que se han añadido algunas líneas de referencia auxiliares para visualizar su posición espacial.

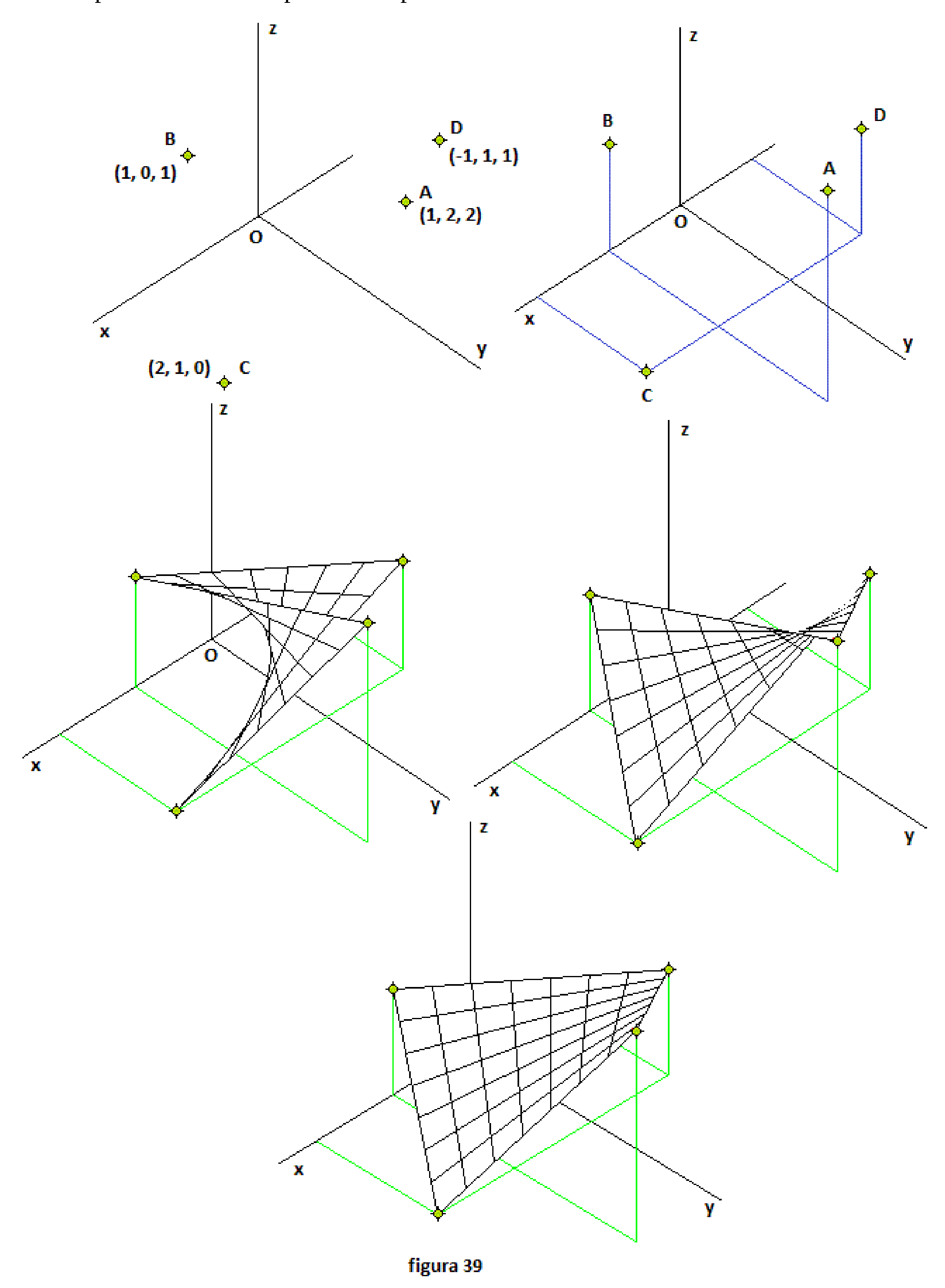


figura 39

Los puntos son no coplanarios ya que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1+1 & 2-1 & 2-1 \\ 1+1 & 0-1 & 1-1 \\ 2+1 & 1-1 & 0-1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Las directrices **A-B** y **C-D** serán las representadas por

$$(1, 0, 1) + \lambda \{0, 2, 1\} = (1, 2\lambda, 1+\lambda) \quad \text{y} \quad (2, 1, 0) + \mu \{3, 0, -1\} = (2+3\mu, 1, -\mu)$$

por lo que la dirección de las generatrices de la superficie será la del vector

$$\{1+3\mu, 1-2\lambda, -\mu-\lambda-1\}.$$

Por otra parte, las direcciones de las rectas **A-C** y **B-D** son respectivamente

$$\{1, -1, -2\} \quad \text{y} \quad \{2, -1, 0\}$$

y su producto vectorial es el vector $\{-2, -4, 1\}$. La condición de ortogonalidad de éste con la dirección de las generatrices nos permite obtener la relación: $\lambda = \mu + 1$ y con ella podemos escribir la parametrización:

$$\underline{s}_1 \equiv (2+3\mu, 1, -\mu) + v\{1+3\mu, -2\mu-1, -2\mu-2\},$$

que habiendo elegido adecuadamente los intervalos de los parámetros ($\mu \in [-1,0]$, $v \in [-1,0]$) es la primera hoja representada en la figura 39.

Conservando ahora las directrices **A-B** y **C-D**, la dirección de las generatrices del paraboloide es la $\{1+3\mu, 1-2\lambda, -\mu-\lambda-1\}$. Tomando las direcciones de las rectas **A-D** y **B-C**

$$\{2, 1, 1\} \quad \text{y} \quad \{1, 1, -1\}$$

su producto vectorial es el vector $\{-2, 3, 1\}$ y la condición de ortogonalidad nos permite obtener la relación: $\lambda = -\mu$. Con ella obtenemos

$$\underline{s}_2 \equiv (2+3\mu, 1, -\mu) + v\{1+3\mu, 1+2\mu, -1\},$$

que para los intervalos $\mu \in [-1,0]$, $v \in [-1,0]$ es la segunda hoja representada en la figura 39.

Las directrices **A-C** y **B-D** serán finalmente las representadas por

$$(2, 1, 0) + \lambda \{1, -1, -2\} = (2+\lambda, 1-\lambda, -2\lambda) \quad \text{y} \quad (1, 0, 1) + \mu \{2, -1, 0\} = (1+2\mu, -\mu, 1)$$

asi que la dirección de las generatrices de la superficie será la del vector

$$\{1+\lambda-2\mu, 1-\lambda+\mu, -2\lambda-1\}.$$

Por otra parte, las direcciones de las rectas **A-D** y **B-C** son **{2, 1, 1}** y **{1, 1, –1}** y su producto vectorial **{–2, 3, 1}**. La condición de ortogonalidad nos permitirá obtener la relación: $\lambda = \mu$ y con ella podemos escribir la parametrización:

$$\underline{s}_3 \equiv (1 + 2\,\mu, -\mu, 1) + v\,\{1 - \mu, 1, -2\,\mu - 1\},$$

que para $\mu \in [-1,0]$, $v \in [0, 1]$ es la tercera hoja representada en la figura 39.

4.2.- Acoplamiento de paraboloides. Generación de formas compuestas.

Los procedimientos analizados anteriormente nos permiten la generación sistemática de formas compuestas por hojas de paraboloides mediante la simple asociación de cuadriláteros con uno, dos o tres vértices comunes o compartiendo uno o dos de sus lados. Esto permite asociar a un número determinado de puntos una gran cantidad de hojas compuestas distintas. Si a lo anterior sumamos las tres posibilidades de que disponemos por cada cuadrivértice podemos estar hablando de una variedad ilimitada de formas compuestas formadas por hojas de paraboloides acoplados entre sí. Condiciones adicionales de simetría o antimetría, entre otras, pueden particularizar estas formas compuestas para personalizar los modelos y dotarlos de características o referencias visuales que los singularicen.

Siguiendo con el ejemplo realizado en el epígrafe anterior, basta la introducción de solamente un quinto vértice para ampliar notablemente las posibilidades de acoplamiento de dos hojas. En principio obtendríamos cuatro grupos para el segundo cuadrilátero a añadir a los $\underline{s}_1$, $\underline{s}_2$, $\underline{s}_3$ generados en el ejercicio y que son los que siguen los esquemas representados en la figura 40.

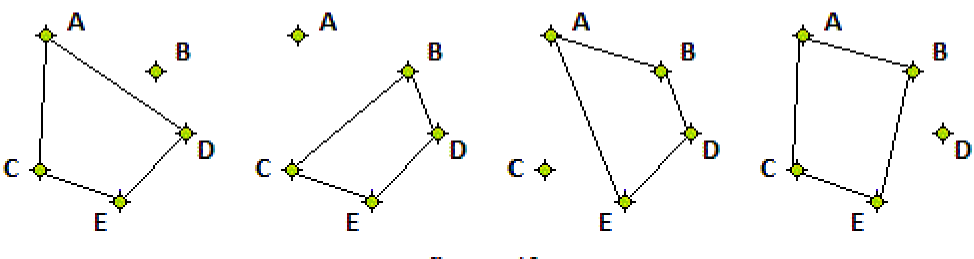


figura 40

En cada uno de esos cuatro grupos el nuevo vértice **E** forma cuadrilátero con tres de los vértices de la configuración **A B C D** ya establecida, o sea los que formarán los nuevos cuadriláteros **A C D E**; **B C D E**; **A B D E y A B C E**. Para cada uno de ellos hay además nueve posibilidades lo que hacen un total de 36 posibles acoplamientos de dos hojas. En la figura 41 se muestran los esquemas a seguir en las nueve combinaciones con el primer grupo de los representados en la figura 40, es decir el que se corresponde con el cuadrilátero **A C D E** como segunda hoja. Se observa que las dos hojas compartirán dos lados con el cuadrilátero anterior en tres de las nueve combinaciones. En los seis restantes casos los dos paraboloides compartirán un solo lado.

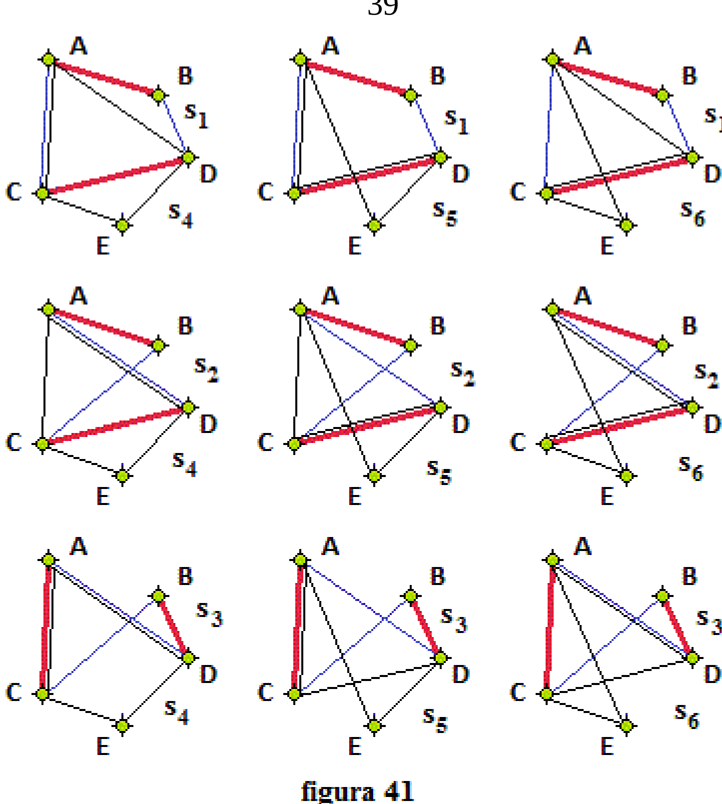


figura 41

Para ilustrar estos acoplamientos se ha añadido un punto **E (–1, 2, 0)** a los cuatro anteriores **A (1, 2, 2)**, **B (1, 0, 1), C (2, 1, 0)** y **D (–1, 1, 1)** –figura 42–.Toda vez que los puntos han sido elegidos arbitrariamente salvo por la simplicidad de sus coordenadas los acoplamientos resultantes no son especialmente relevantes desde el punto de vista formal.

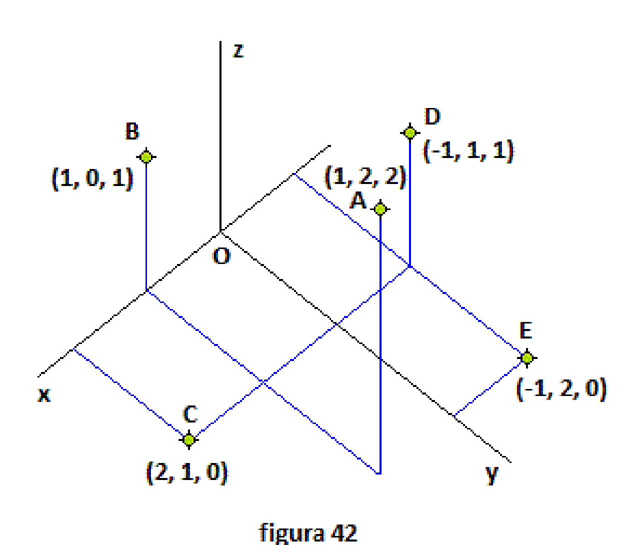


figura 42

Tomando como directrices los **A-C** y **D-E** y como bordes los **A-D** y **C-E** se obtiene el paraboloide

$\underline{s}_4 \equiv \mathbf{(-1,\ 1+\mu,\ 1-\mu) + v\ \{2+\mu,\ 1-2\mu,\ 1-\mu\}}$.

Utilizando como directrices los **A-C** y **D-E** y como bordes los **A-E** y **C-D** se obtiene el

$\underline{s}_5 \equiv \mathbf{(-1,\ 1+\mu,\ 1-\mu) + v\ \{3-\mu,\ 0,\ 3\mu-1\}}$

y tomando como directrices los **A-D** y **C-E** y como bordes los **A-E** y **C-D** se obtiene el

$\underline{s}_6 \equiv \mathbf{(2+3\mu,\ 1-\mu,\ 0) + v\ \{-3-5\mu,\ 0,\ 1-\mu\}}$.

Como ejemplos ilustrativos, en la figura 43 se representan solamente los tres acoplamientos que comparten dos de los lados de ambos cuadriláteros.

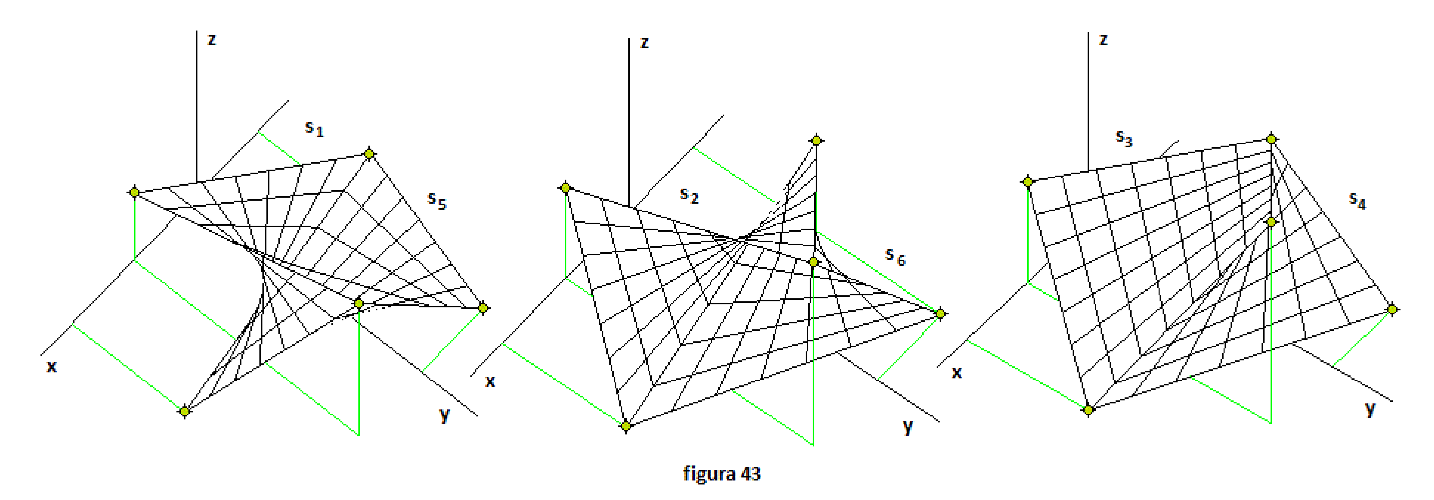


figura 43

Con los procedimientos anteriores se pueden abordar ahora acoplamientos que tengan algún sentido estructural o simplemente estético tales como planificar transiciones curvas entre otros objetos, proyectar cubiertas más o menos complejas de espacios cerrados o servir de guía para establecer simplemente objetos geométricos decorativos. En la figura 31 ya se mostraron algunos ejemplos de configuraciones con mayor o menor interés acopladas con condiciones de simetría. Sin pretender mostrar objetos muy complejos, en la figura 44 se han representado complementariamente dos acoplamientos de cuatro u ocho hojas de paraboloides asociados a un tetraedro con centro, otro con dos ejes interiores o cerrado, un acoplamiento simple de dos hojas "abierto" y un ejemplo un poco más elaborado con ocho hojas asociadas a los vértices de un ortoedro, cubriendo una planta cuadrada y que deja interiormente por encima de la planta un cuadrado menor libre.

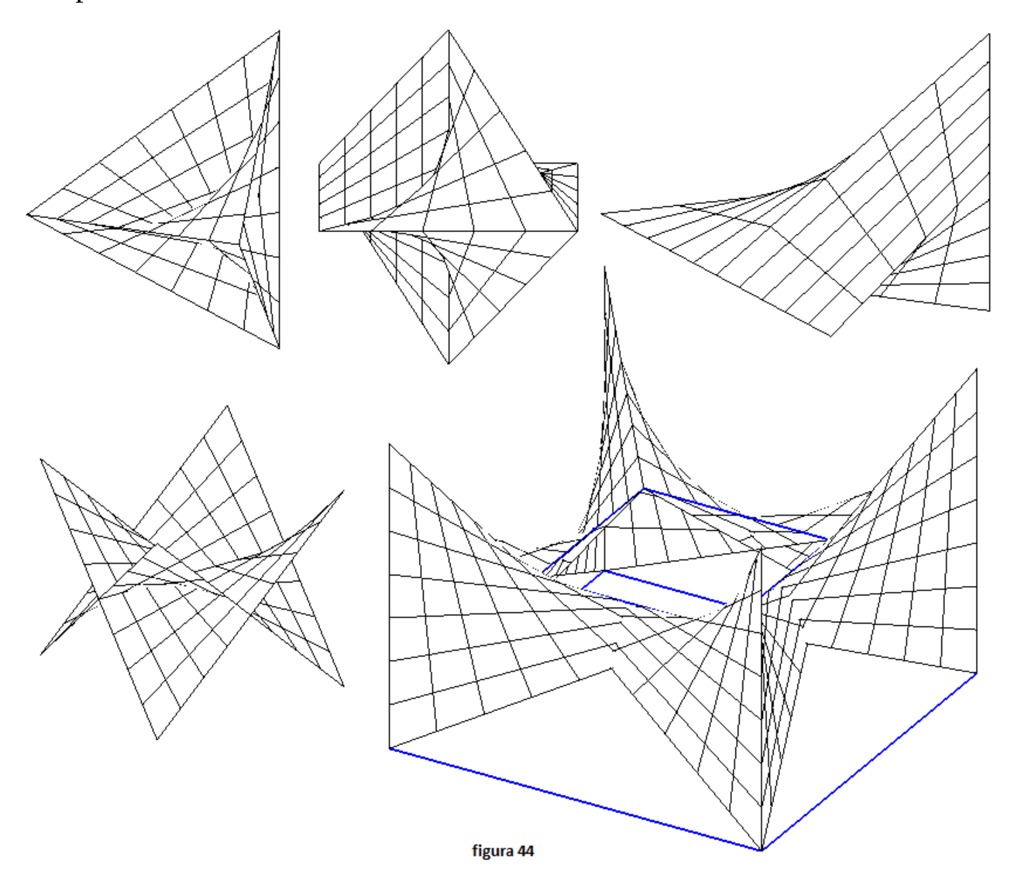


figura 44

§ 5.- Imágenes en el diseño y la arquitectura

5.1.- Esculturas geométricas decorativas. Paraboloides y Helicoides. Alfaro.

Cuando materializamos la familia de generatrices rectas de un fragmento de una superficie reglada y las substituimos por objetos tridimensionales en forma de barras de sección rectangular, tubos etc. podemos remplazar la imagen matemática ideal por una construcción física con más o menos atractivo visual y acierto estético en sus proporciones que se agregan a las que vienen denominándose genéricamente "esculturas geométricas" –figura 45–. Además de su apariencia de liviandad en comparación con sus dimensiones, el atractivo de estos objetos se pone de manifiesto la mayoría de las veces a través de la variación relativa del objeto percibido según los distintos puntos de vista de manera que el desplazamiento del espectador se transfiere al objeto dotándole a este de movimiento aparente y de animación propia. De ahí los calificativos de "ligero", "alado", "vibrante" etc. que acompañan a este tipo de ornamentos. Esta materialización de superficies regladas por substitución discreta de su sistema de generatrices llega a límites muy notables en algunos de los conoides ensayados reiteradamente por el arquitecto Santiago Calatrava y utilizados de todas las maneras posibles con manifiesta insistencia (esculturas, puertas, cubiertas fijas o móviles etc.).

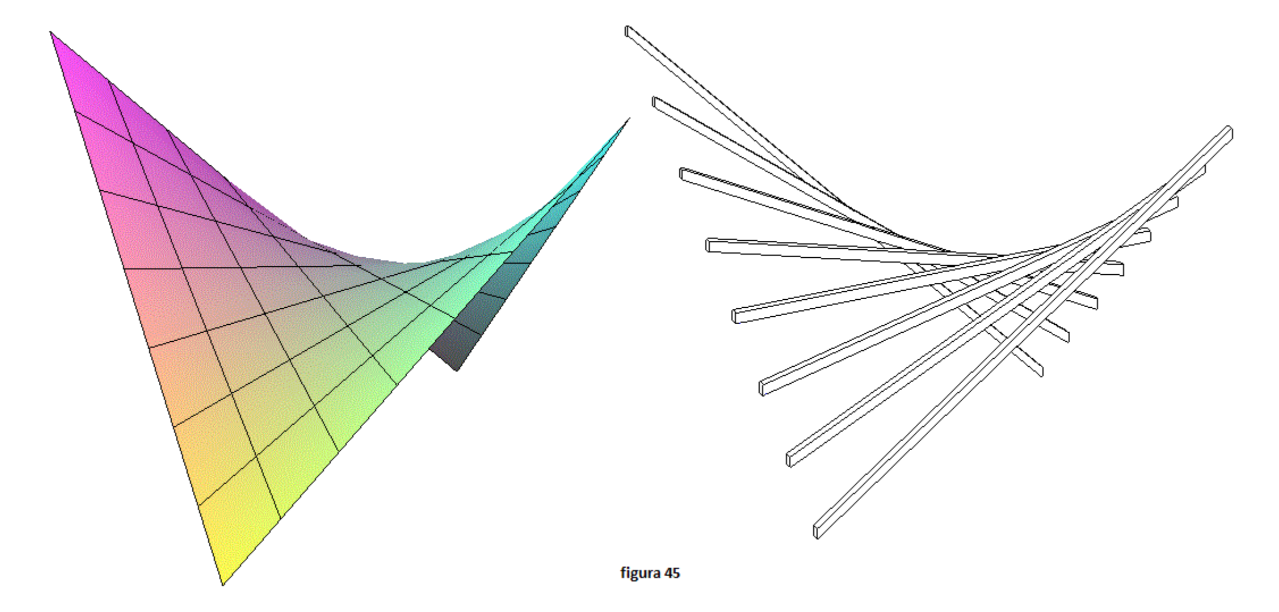


figura 45

Algunas de estas "esculturas de barras" son literalmente la simple materialización finita de fragmentos de superficies regladas a través de su sistema de generatrices pero, en general, predomina en ellas la creatividad libre y presentan pequeñas alteraciones o variaciones sensibles de lo que podrían ser sus modelos matemáticos originales. Todo ello no es obstáculo para que aquí, la generación y el análisis de las superficies regladas sea una fuente de motivos para los esbozos de estos objetos decorativos que tienen gran aceptación.

El conjunto de generatrices rectas así materializadas deben de ser sostenidas por alguna estructura adicional lo más reducida posible para acentuar su ligereza. Como se sabe, en una superficie reglada las generatrices se encuentran más próximas entre sí a lo largo de la línea de estricción –que no es más que una directriz mínima– por lo que esta línea adquiere una cierta importancia en una gran mayoría de los casos ya que puede "coser" las generatrices

en su punto de conexión física a partir del cual las barras se alejan progresivamente unas de otras extendiéndose liberadas de ataduras hasta los límites del fragmento.

En los conoides rectos la línea de estricción es su eje con lo que, independientemente de otros posibles apoyos, el sistema de generatrices materializado puede ser unido y sustentado por un soporte estructural recto lo que permite simplificar las construcciones. En el caso de un fragmento de paraboloide podemos disponer de dos sistemas de generatrices rectas y sabemos que, en cualquier caso, su línea de estricción será una parábola –una curva plana– o una recta, tal y como hemos visto en el **2.1** del **§ 2**.

Las estructuras geométricas preferidas para ser tomadas como modelos iniciales a fin de generar este tipo de objetos son, por un lado las superficies tangenciales preferentemente las de desarrollo tangencial de hélices, por otro lado están los helicoides, sobre todo los helicoides rectos y finalmente son los paraboloides hiperbólicos o distintas agrupaciones de hojas de paraboloides hiperbólicos tal como hemos visto descritas en el epígrafe anterior **§ 4**.

Visto que las superficies de desarrollo tangencial de una curva se reconocen con cierta facilidad es interesante poder énfasis en la distinción entre una secuencia de generatrices de una familia perteneciente a una hoja de paraboloide hiperbólico y el conjunto de generatrices de una hoja de helicoide recto. Se puede particularizar el caso de la transición entre dos rectas que se cruzan y cuyas direcciones son perpendiculares, disposición que se ha enfatizado en el **2.4** y utilizada, de una u otra manera, reiteradamente en este tipo de construcciones.

Tratamos aquí, por ejemplo, del conjunto discreto de generatrices que permiten la transición entre los dos segmentos de igual longitud "**2 b**" contenidos en cada una de las dos rectas no coplanarias de direcciones perpendiculares entre sí. Sin perder generalidad, uno de ellos lo suponemos perteneciente al eje **OZ** con origen en su punto medio en tanto el otro se encuentra sobre el plano horizontal **XOY** cortando al eje **OX** en el punto **(a, 0, 0)**. El caso significativamente más importante es aquel en que el eje **OX** corta al segundo segmento en su punto medio. Esta disposición predominante se muestra en la figura 46.

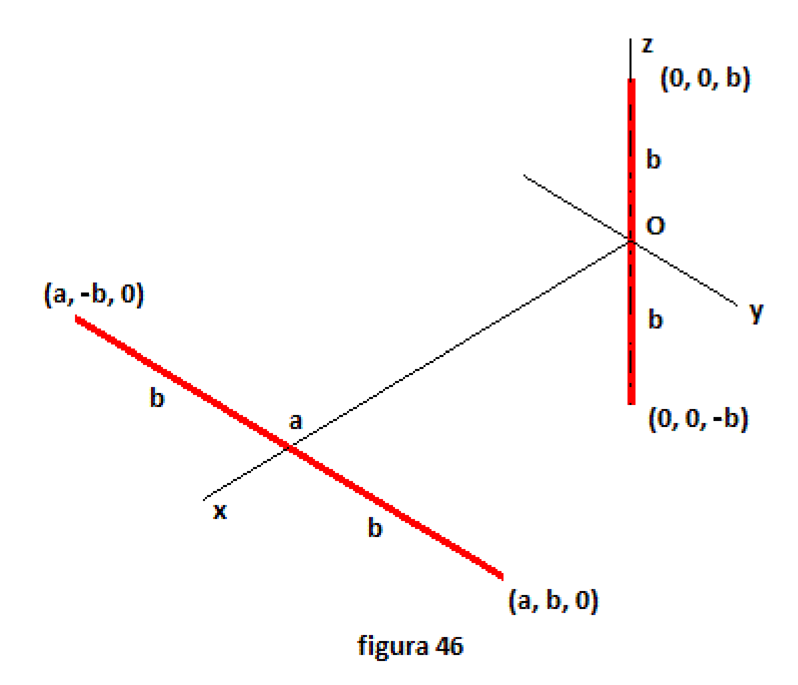


figura 46

Una hoja que permite la transición entre ambos segmentos es la del helicoide recto

$$\left(\mathbf{a - u,\ v \cos \frac{\pi}{2\,a} u,\ v \operatorname{sen} \frac{\pi}{2\,a} u}\right)$$

que es el lugar geométrico del segmento de longitud constante que gira –en sentido dextrógiro en este caso– desde la posición horizontal a la vertical (es importante no relacionar esta transición con la generada en el **2.1**). Aquí el parámetro "**v**" varía en el intervalo entre **u = 0** –recta **(a, v, 0)**– y **v = 1** –recta **(0, 0, v)**– en tanto **v∈[–b, b]**. La longitud del segmento permanece igual a "**2 b**", uno de los extremos sigue la hélice $\left(\mathbf{a - u,\ b \cos \frac{\pi}{2\,a} u,\ b \operatorname{sen} \frac{\pi}{2\,a} u}\right)$ en tanto el otro sigue la $\left(\mathbf{a - u,\ -b \cos \frac{\pi}{2\,a} u,\ -b \operatorname{sen} \frac{\pi}{2\,a} u}\right)$, ambas de torsión negativa. La línea de estricción de esta superficie es el eje **OX**. El proceso de transición puede visualizarse en la figura 47 donde se muestra la hoja de la superficie con sus bordes helicoidales y algunas de las rectas de la transición extraídas de la misma. La conversión de estas rectas en barras para la reconstrucción material discreta del modelo en el espacio, proporcionaría una configuración que puede ser representada por la imagen de la figura 48 formada por algunas barras idénticas de longitud "**2 b**".

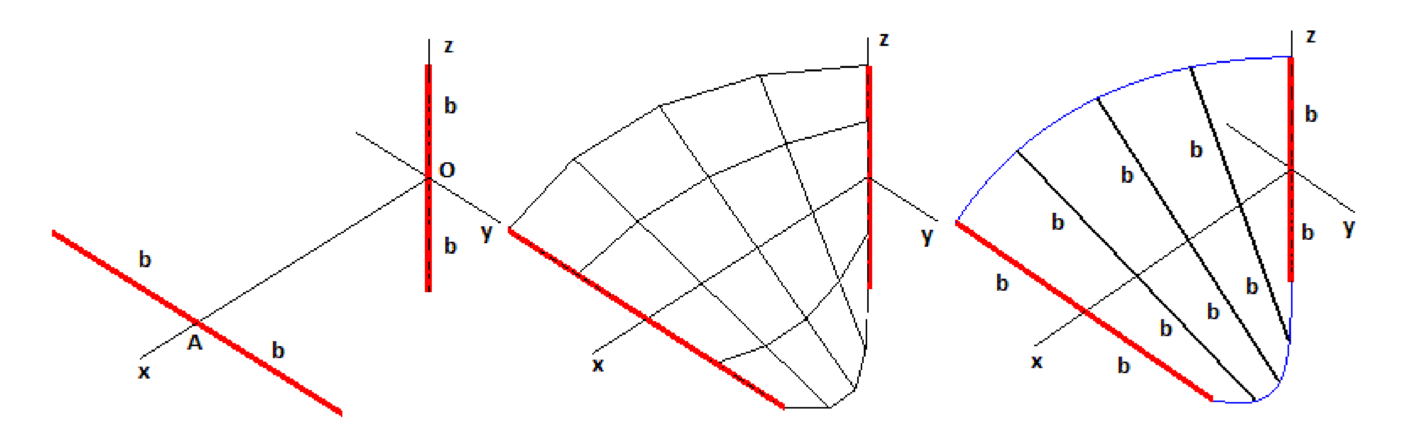


figura 47

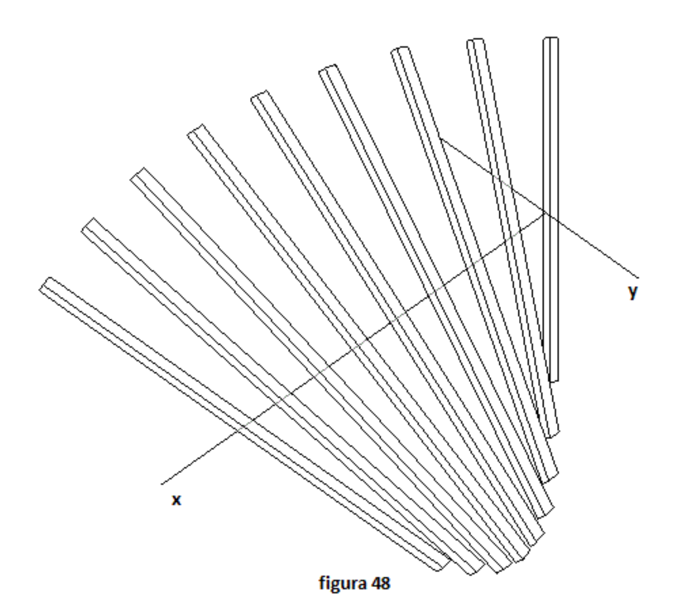


figura 48

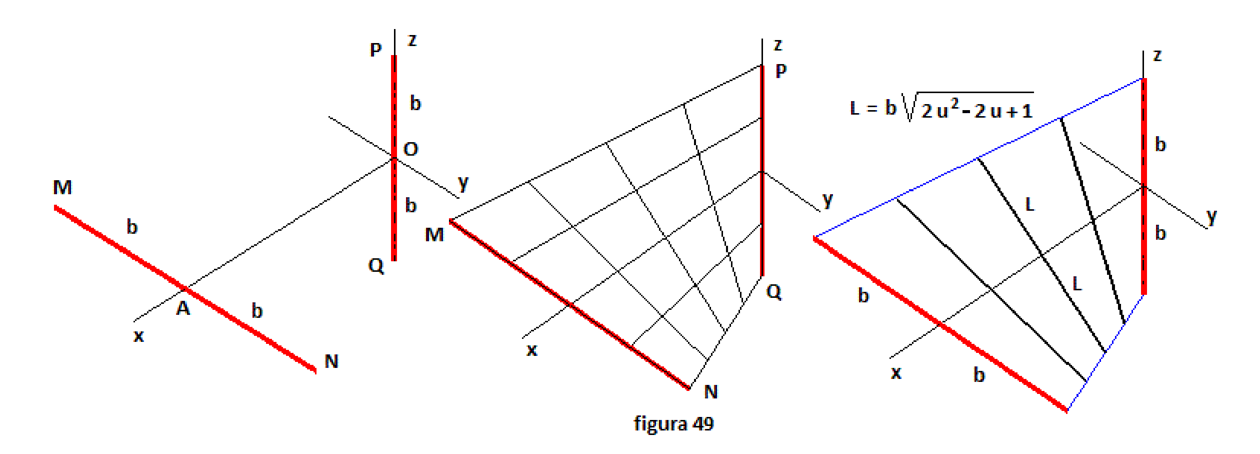


figura 49

En el caso del paraboloide hiperbólico –figura 49–, la hoja que efectúa la transición puede generarse sobre el cuadrivértice

$$\mathbf{M \equiv (a, -b, 0), N \equiv (a, b, 0), P \equiv (0, 0, b), Q \equiv (0, 0, -b)}$$

tomando como directrices los segmentos **MP** y **NQ** en tanto los bordes son los **MN** y **PQ**. En esas condiciones y procediendo como ya se ha descrito obtenemos el cuadrilátero alabeado:

$$\mathbf{(a\,u, -b\,u, b - b\,u) + v\,\{0, u, -1 + u\} = (a\,u, (v - b)\,u, (v - b)\,(u - 1))}$$

cuya línea de estricción es el eje **OX**. Los parámetros varían entre **u = 0** que determina la recta **(0, 0, –v + b)**, y **u = 1** que es la recta **(a, v – b, 0)** en tanto **v∈[0, 2 b]**. Los extremos de las generatrices siguen aquí las dos directrices

$$\mathbf{(a\,u, -b\,u, -b\,(u-1))} \quad \text{y} \quad \mathbf{(a\,u, b\,u, b\,(u-1))}$$

así que la longitud de cada segmento de generatriz será

$$\mathbf{2L = \sqrt{4\,b^2\,u^2 + 4\,b^2\,(u-1)^2} = 2\,b\,\sqrt{2\,u^2 - 2\,u + 1}}$$

por lo que para la conversión de estas rectas en barras deberemos tener en cuenta estas longitudes si queremos que los dos extremos de todas las barras estén respectivamente alineados entre sí –definiendo las dos directrices rectas– y que representen de forma discreta una hoja de paraboloide y no otra cosa.

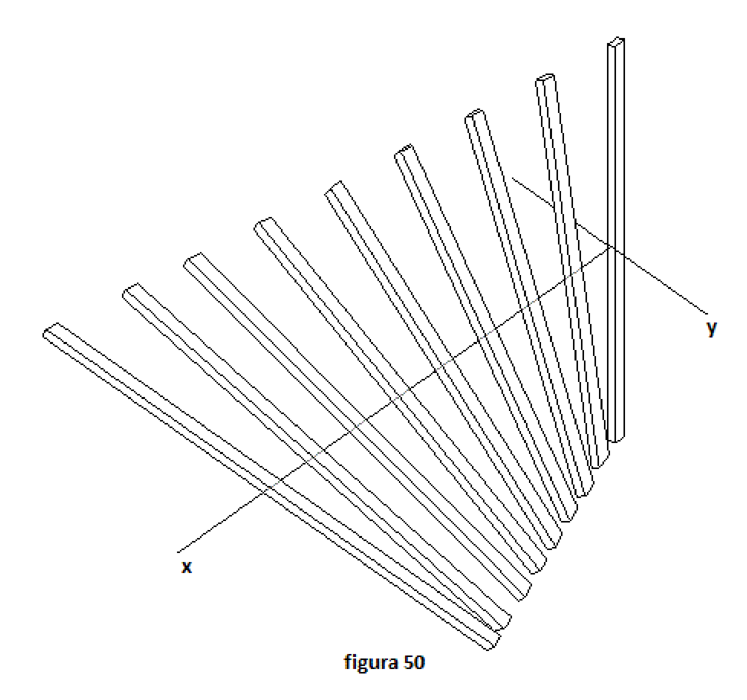


figura 50

Podemos ilustrar una configuración representativa con la imagen de la figura 50 formada por algunas barras de longitud variable entre las longitudes de las dos barras extremas iguales a "**2 b**". La de

longitud mínima atraviesa el eje **OX** en el punto medio $\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ entre ambos extremos y tiene una longitud de

$$2\,L = 2\,b\,/\sqrt{2} = \sqrt{2}\ b \approx 1{,}414\ b.$$

En las figura 51 se muestran, para su mejor comparación, los dos conjuntos de "barras" anteriores "cosidas" por la línea que une sus puntos medios.

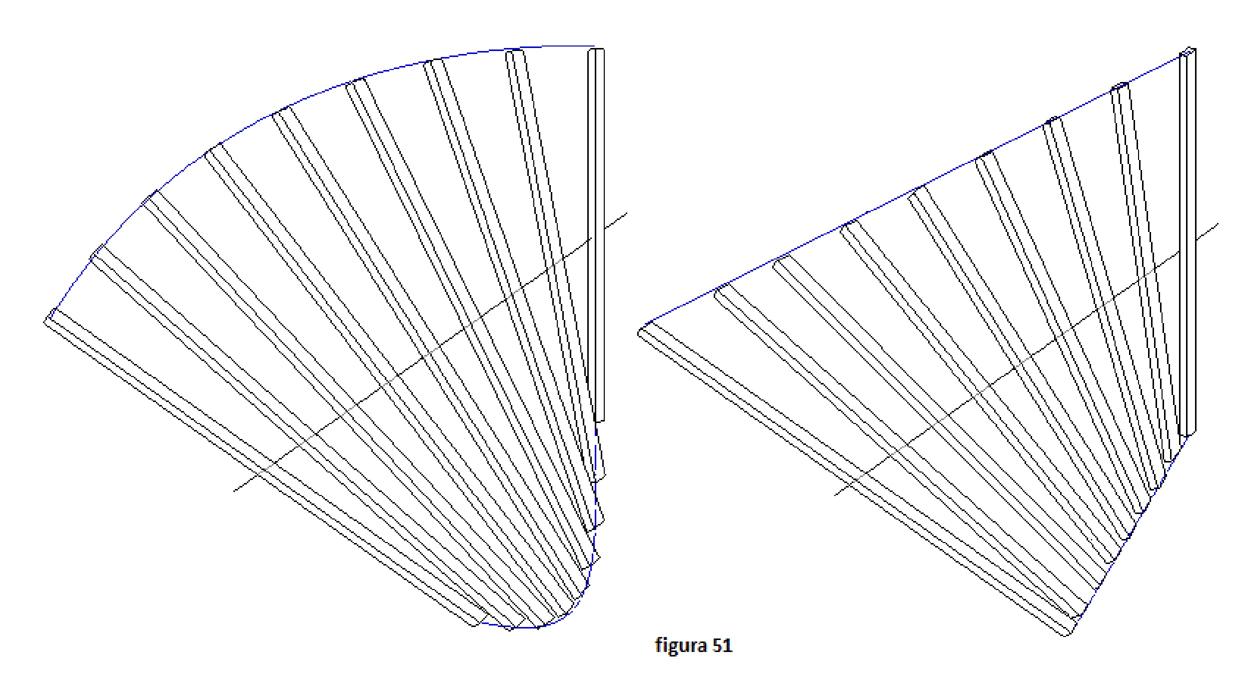


figura 51

Existen numerosos ejemplos de este tipo de construcciones. Las podemos encontrar accidentalmente en diferentes museos, plazas o jardines de cualquier lugar. Aquí podemos tomar como ejemplo representativo cualquiera de las esculturas de barras del valenciano Andreu Alfaro. Este artista, representante distinguido de este tipo de objetos está asociado al constructivismo y en una de sus épocas más productivas fue llamado "el escultor del metal" con notorias obras "abstractas" en acero o aluminio. La representada en la figura 52 es la denominada "Dos Rombos" realizada en 1977 y situada en el Parque Cervantes de Barcelona. Se acompaña en la misma figura una superficie "matemática" realizada por agrupación de cuatro hojas de paraboloide acopladas con las técnicas del cuadrilátero alabeado que nos puede servir de modelo alternativo para aproximar su estructura básica.

Este tipo de construcciones realizadas a pequeña escala dan lugar a las "maquetas" de los talleres experimentales o formativos de geometría o bien a diferentes objetos ornamentales que pueden ser también utilizadas como modelo de uso cotidiano o simplemente decorativo. En esta línea se pueden considerar los ensayos analíticos de los estudiantes de Geometría Diferencial en el apartado dedicado a las superficies regladas. En lo referente al paraboloide hiperbólico se representa en la figura 53 una composición sobre la base de algunos trabajos representativos realizados por alumnos de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid durante el curso 2012-2013.

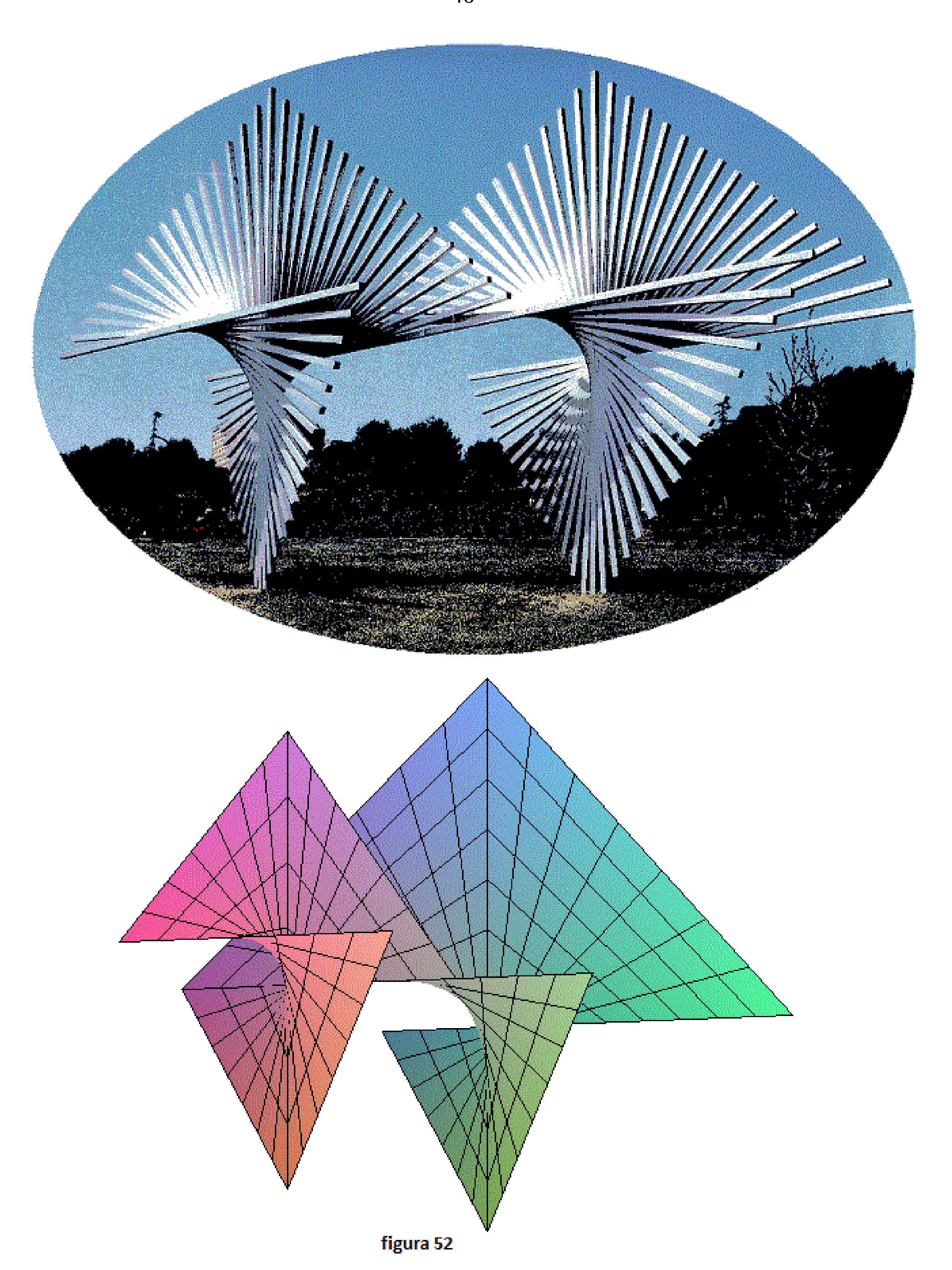


figura 52

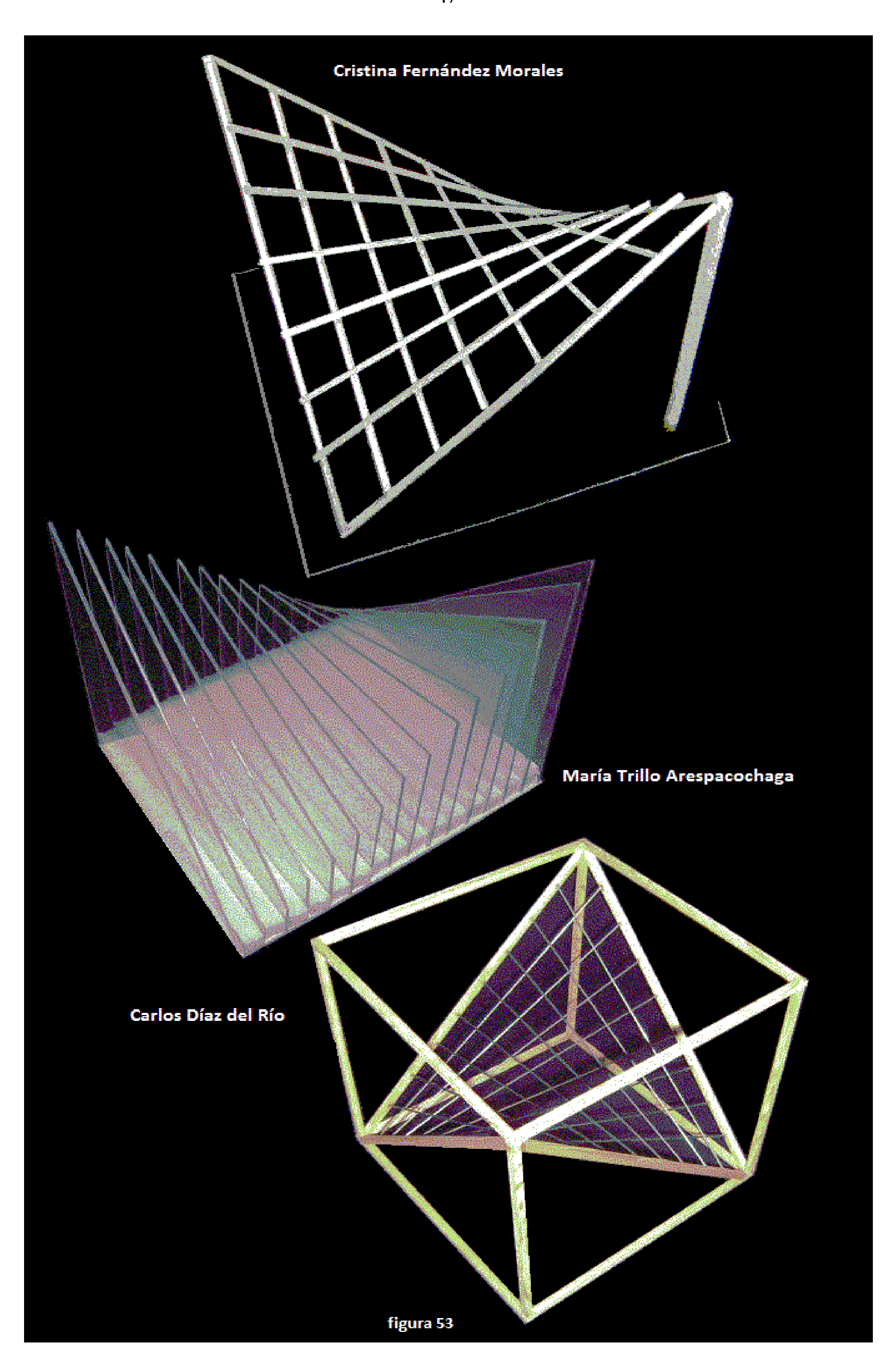

Cristina Fernández Morales
María Trillo Arespacochaga
Carlos Díaz del Río

figura 53

5.2.- El paraboloide hiperbólico como elemento de revestimiento. El parking del Hospital Henri Ford de Detroit.

El primer edificio de aparcamientos del Henry Ford Hospital de Detroit (1949-1955), se construyó en 1959 para dar cabida a la imperiosa demanda de estacionamiento. Diseñado por Albert Kahn Associates fue una edificación innovadora y un modelo para otras fachadas realizadas con elementos similares. Entre 1965 a 1968 se construyó un segundo edificio idéntico junto al primero –figura 54 a–.

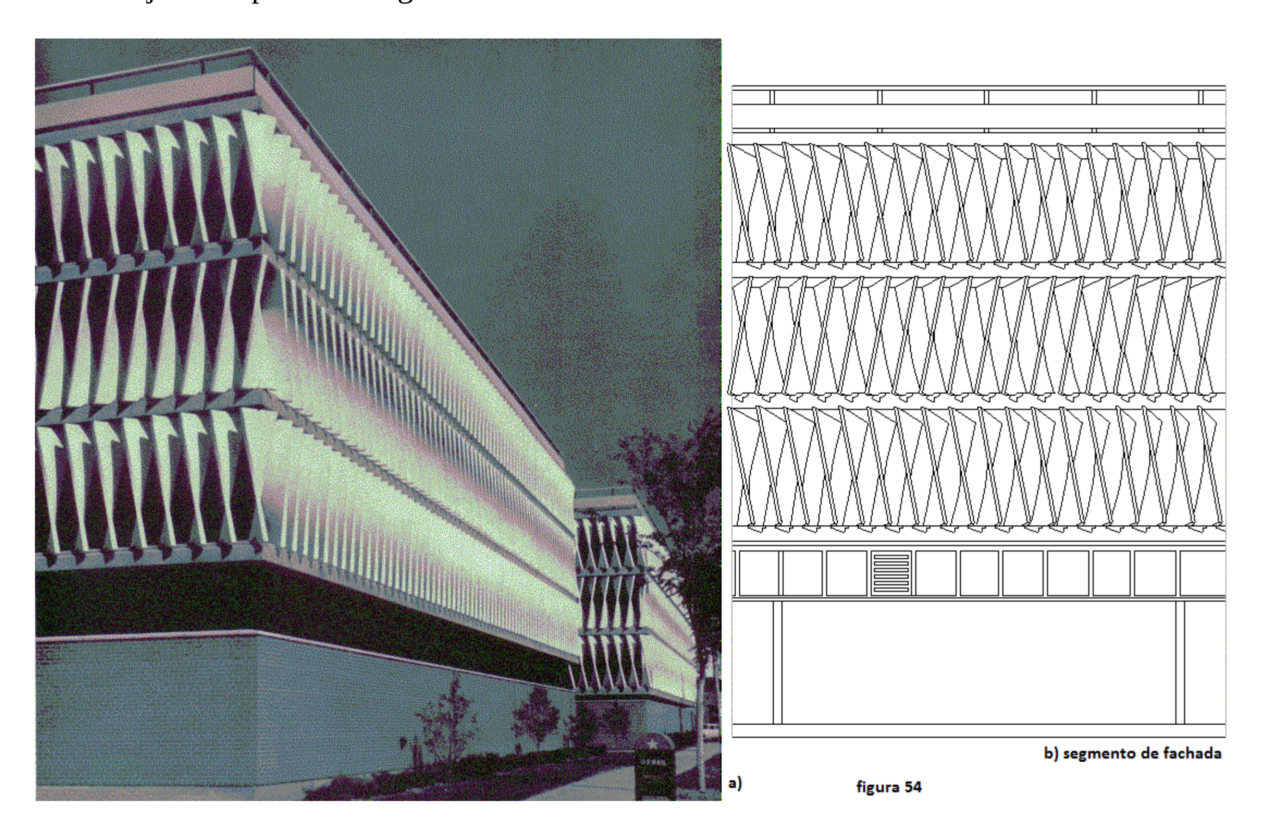


figura 54

El efecto espacial y elegante que produce esta edificación se debe al cerramiento exterior –figura 54 b– formado por planchas prefabricadas blancas de hormigón armado con 2,25 m de alto y un espesor que varía entre los 6,4 a los 8,9 cm limitadas por dos caras exteriores que son dos hojas de paraboloide hiperbólico en el que los bordes superior e inferior tienen direcciones perpendiculares –figura 55–. Estas piezas quedan, en la edificación, encajadas en hendiduras inferiores y ancladas superiormente con angulares de acero –figura 56–. Los hierros de las armaduras interiores de las piezas fueron rectos, siguiendo los dos sistemas de generatrices y se requirieron varios cofres porque es significativo que los paraboloides no son todos idénticos lo que introduce un factor más de variación en la fachada.

En la figura 57 se muestra el paraboloide básico que puede ser generado como una de las tres variantes del cuadrilátero alabeado asociado a cuatro vértices. Para una pieza de longitud "**L**" y ancho superior e inferior "**a**", podemos tomar como vértices los puntos:

$$\mathbf{A}\left(0, -\frac{a}{2}, \frac{L}{2}\right)\ ;\ \mathbf{B}\left(0, \frac{a}{2}, \frac{L}{2}\right)\ ;\ \mathbf{C}\left(\frac{a}{2}, 0, -\frac{L}{2}\right)\ ;\ \mathbf{D}\left(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{L}{2}\right),$$

y el paraboloide será el resultante de tomar como directrices los segmentos **AB** y **CD**

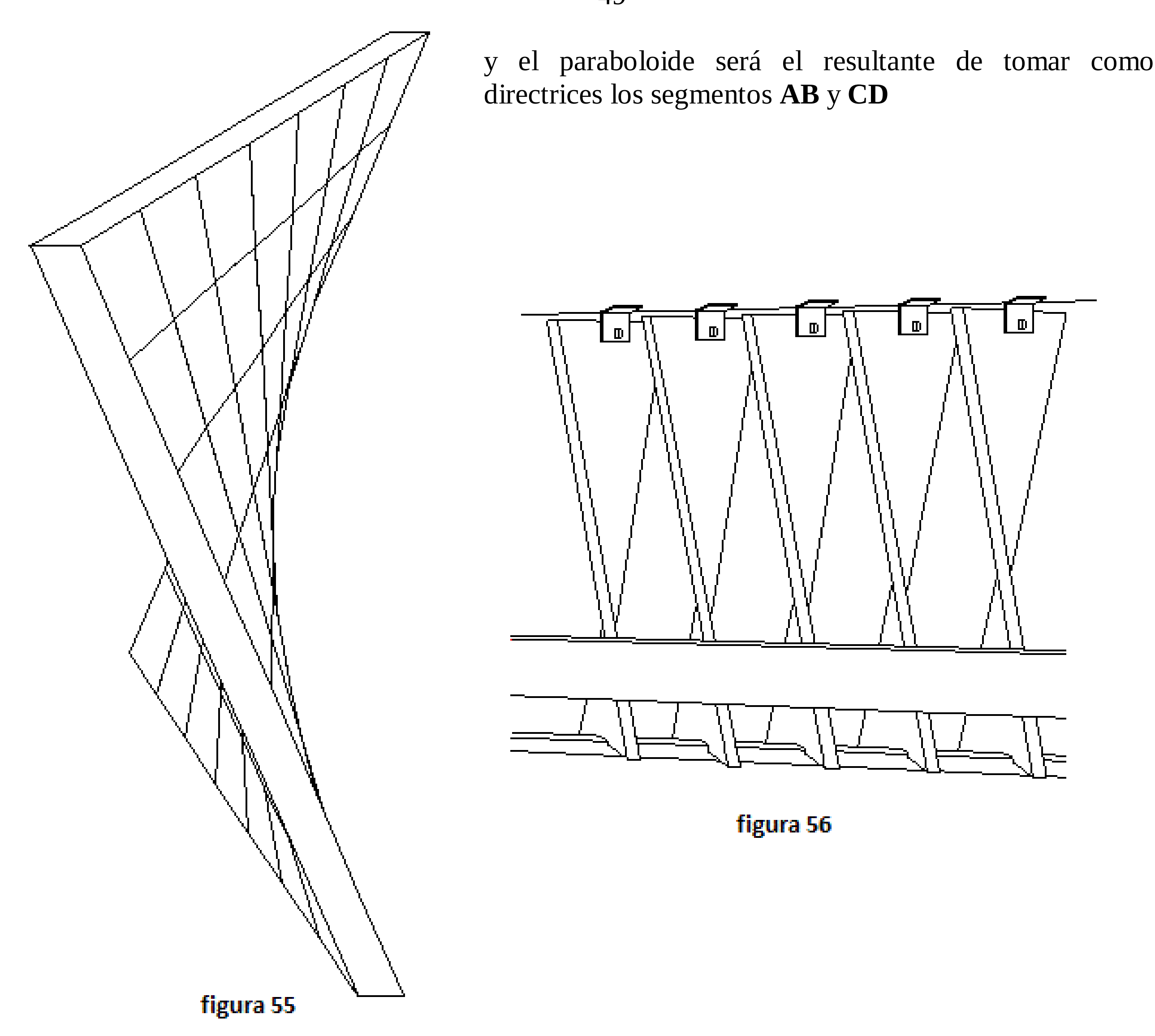


figura 55

figura 56

$$\left(0, \frac{a}{2} + a\,\lambda,\ \frac{L}{2} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{2} + a\,\lambda,\ 0,\ -\frac{L}{2} \right)$$

en tanto los bordes son los determinados por los segmentos **AC** y **BD** respectivamente cuyas rectas tienen como dirección:

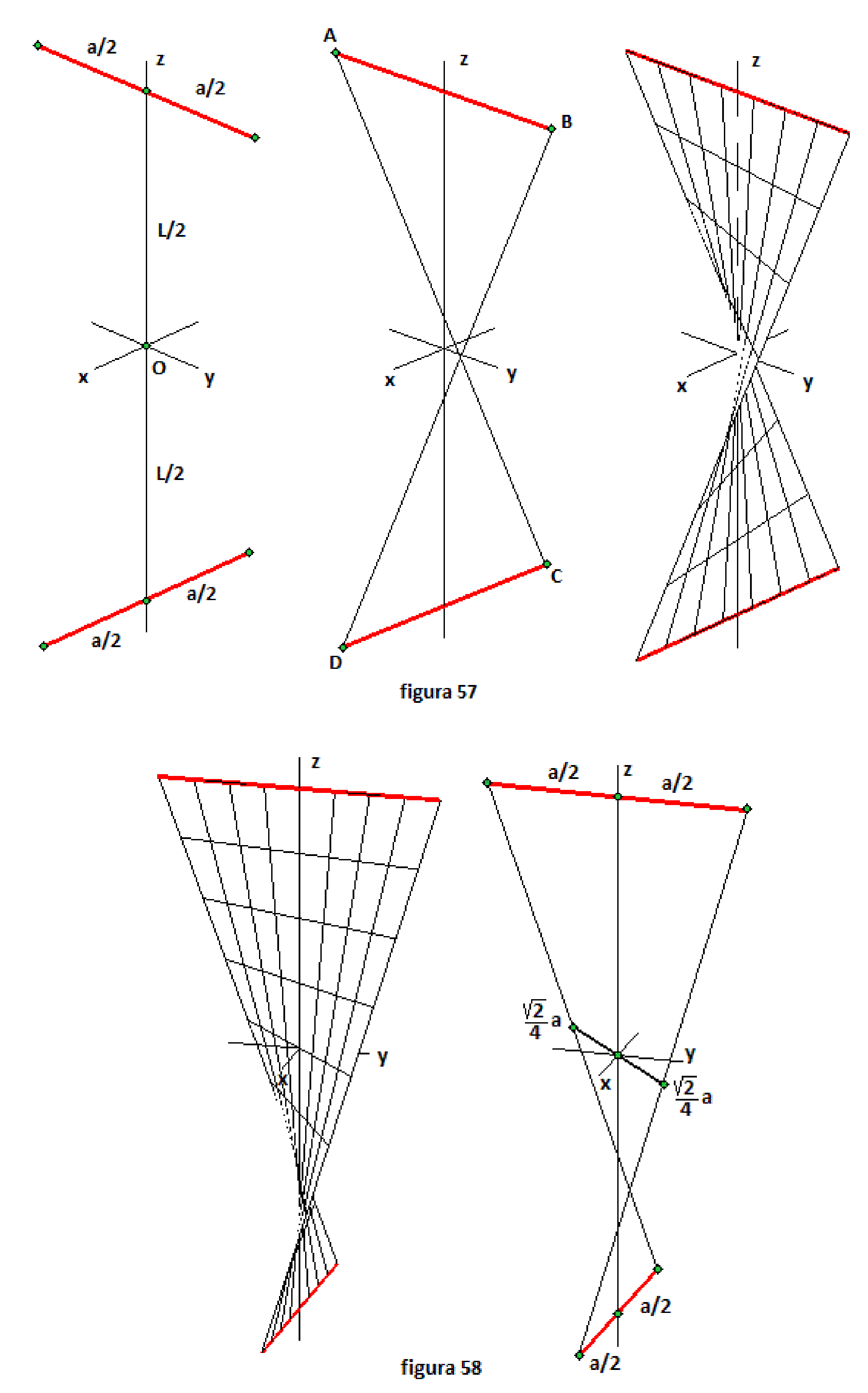
$$\{ a, -a, 2\,L \} \quad \text{y} \quad \{ -a, a, 2\,L \}$$

y que definen el plano director. de aquí se deduce que $\lambda = \mu$, y el paraboloide puede escribirse:

$$\left(0, \frac{a}{2} + a\,u,\ \frac{L}{2} \right) + v \left\{ -\frac{a}{2} - a\,u,\ \frac{a}{2} + a\,u,\ L \right\} = \left(-v \left(\frac{a}{2} + a\,u \right),\ \left(\frac{a}{2} + a\,u \right) (1 + v),\ \frac{L}{2} + L\,v \right)$$

en el que las directrices superior e inferior se alcanzan para los valores $\mathbf{v = 0}$ y $\mathbf{v = -1}$ respectivamente y los bordes laterales para los valores $\mathbf{u = -1}$ y $\mathbf{u = 0}$.

Los anchos de la pieza medidos a lo largo del sistema de generatrices horizontales entre las longitudes "**a**" de los extremos superior e inferior varían según $\mathbf{L = a\sqrt{2\,v^2 + 2\,v + 1}}$, verificándose que el mínimo se encuentra, trivialmente, para el valor $\mathbf{v = -\frac{1}{2}}$, siendo su longitud $\mathbf{\frac{a}{\sqrt{2}}}$ –figura 58–.



5.3.- El paraboloide como elemento de cubrición. Acoplamiento de bordes rectos sobre planta cuadrada. Lavagnino.

Existen innumerables ejemplos del uso del paraboloide hiperbólico como cubrición o revestimiento de espacios desde la construcción de "l'auvent experimental" de la nave de Dreux en 1933 del ingeniero Laffaille. Algunos de ellos son muy notorios y relativamente bien conocidos. Una cita inevitable en este contexto es la de Félix Candela. Su restaurante "Los Manantiales" realizado en colaboración con Álvarez Ordoñez en los años 1957-1958 en Xochimilco, Mexico D. F., es una de las primeras obras maestras de la arquitectura moderna en este contexto, seguramente no superada en gracia y ligereza por ninguna otra posteriormente. Pero Candela construye o participa de una u otra forma en una gran cantidad de otras edificaciones singulares que utilizan los acoplamientos o agrupaciones de paraboloides hiperbólicos como elementos principales del diseño. Su capacidad creativa en este campo de la geometría presenta ya una gran complejidad en la estructura "gótica" de la Iglesia de la Medalla Milagrosa en Navarte, México D. F. de 1953-1955.

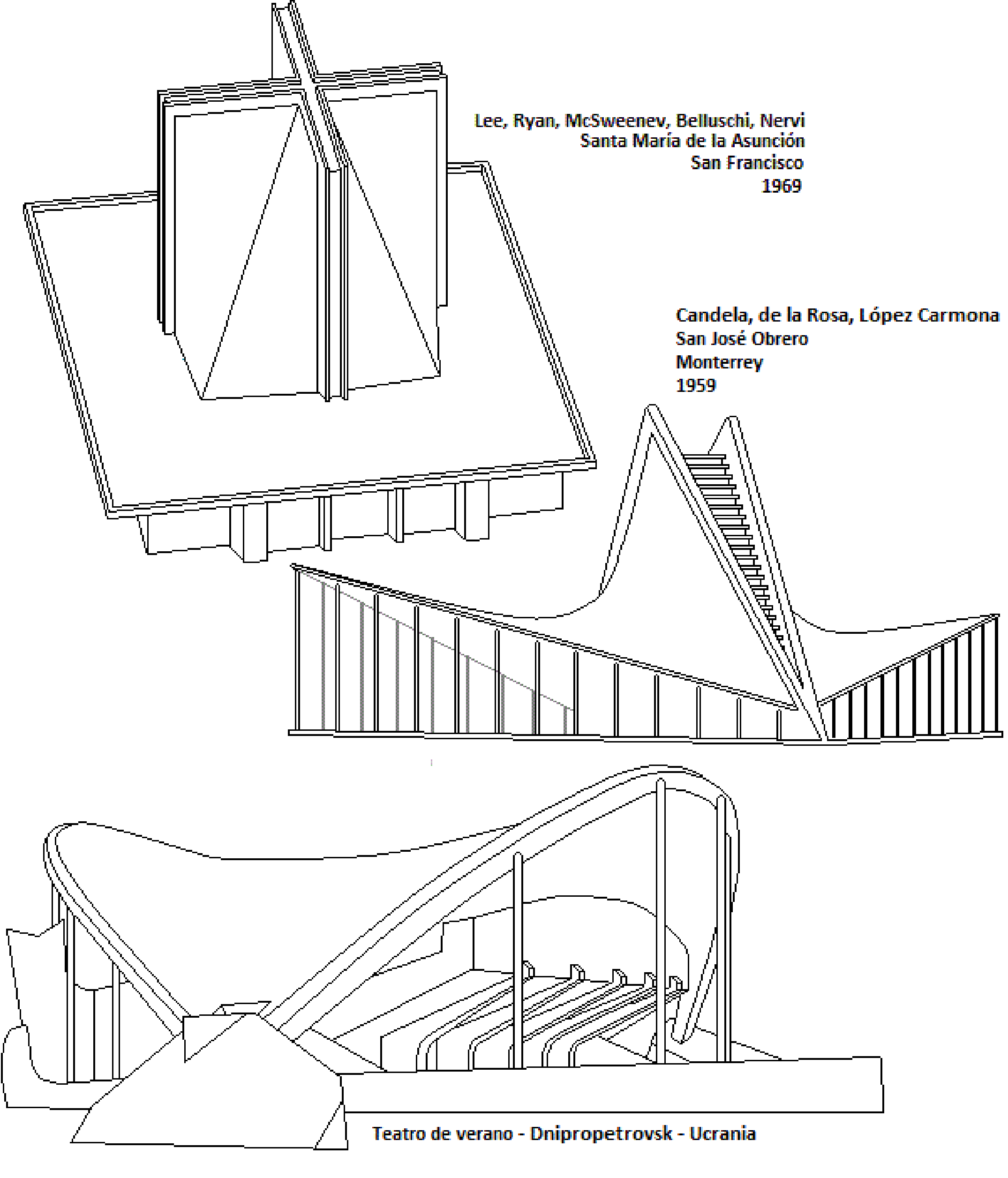


figura 59

En la figura 59 se han realizado algunos ejemplos significativos. Está representado el esquema básico de la Iglesia de San José Obrero de Monterrey, Nuevo León, México, construida por Candela en colaboración con los arquitectos De La Mora y López Cardona. Es una agrupación simple de dos hojas de paraboloide de bordes rectos separadas por una abertura central. Acompaña a esta representación en la misma figura, un esquema de la Catedral de Santa María de la Asunción de San Francisco, de los años 1967-1970, diseñada por Lee, Ryan y McSweenev con la supervisión, asesoría y maestría de Nervi y Belluschi. El "estilo Nervi" es inconfundible como tendremos ocasión de ver en el **6.5** pero en cuanto a la disposición de los paraboloides, puede compararse esta edificación con la magnífica catedral de Santa María de Tokio diseñada y realizada en 1961-1964 por Kenzo Tange donde desde los bordes principales de la planta romboidal de la nave principal se alzan ocho gigantescos muros que terminan en una cumbrera en cruz y que son ocho fragmentos de paraboloide hiperbólico. Completan los ejemplos de la figura el esquema de una edificación bastante más moderna como es la Sala de Concierto-Teatro de verano construido sobre una laguna en el parque de Lazar Globa en Dnipropetrovsk, Ucrania que es un espacio semi-abierto, cubierto por un paraboloide hiperbólico de bordes curvados.

Uno de los más sencillos y bellos ejemplos históricos significativos de la utilización de los paraboloides hiperbólicos para la cubrición pura de una planta es el estudio-oficina del arquitecto Arthur G. Lavagnino con la colaboración del ingeniero William C. Taylor realizado en 1958 en Eagle Rock, Los Angeles, conocido también como la residencia o pabellón James F. Real, su primer propietario. En 1959 recibió el premio al mejor diseño del Instituto americano de Arquitectos en el sector Pasadena y puede ser considerado como uno de los ejemplos pioneros más importantes del último modernismo americano. Ha sido catalogado como monumento Histórico-Cultural en 2008. La edificación fue la primera de una serie de estructuras orientadas a investigar este tipo de cubriciones. Una notoria compañía norteamericana, la Pacific Bridge Company, especializada en estructuras de grandes

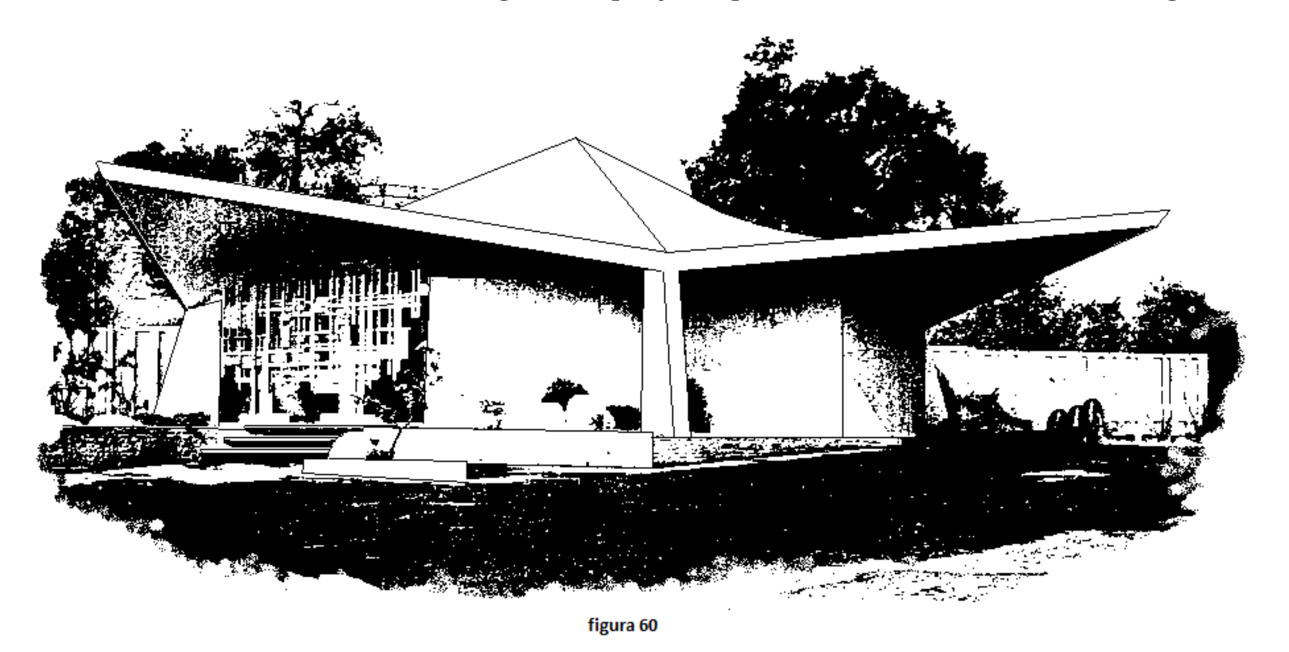


figura 60

dimensiones convirtió este proyecto en un modelo de investigación para demostrar que podían adoptarse técnicas modernas de construcción para crear formas escultóricas que fueran soluciones económicamente competitivas. En la construcción física de la cubierta se empleó una semana para el vertido del hormigón sobre el encofrado realizado con tablones..

Lamentablemente fue el único modelo edificado entre los previstos. La audacia y novedad del planteamiento quedó plasmada en las dificultades que tuvieron los promotores para convencer a los responsables de la concesión de la licencia de obras –el departamento de construcción de Los Ángeles– que la estructura era segura tal y como había sido proyectada. En cierto modo, este proyecto puede considerarse un antecedente de la célebre gasolinera del Tranvía de Gas en Palm Springs –California– de Albert Frei de 1965.

En referencia a este proyecto, resulta muy interesante, como ejercicio de análisis, estudiar las formas de cubrición de una planta cuadrada con cuatro cuadriláteros alabeados de bordes rectos y dos ejes de simetría centrales. El resultado muestra que hay diez posibilidades que se reducen a ocho diferentes entre sí que son las que se representan en la figura 61. Seis de ellas alternan lima-hoyas o lima-tesas, aleros o cumbreras a nivel. Es muy probable que todas ellas hayan sido exploradas en distintos campos de la edificación. Desde la número 8, con aleros a nivel que puede constituir una alternativa depurada de los tradicionales techos a cuatro aguas, hasta la número 6 que representó en su momento –mediados de siglo pasado- además de una gran originalidad, algunas posibilidades funcionales tales que en poco tiempo se convirtió en una agrupación clásica con el nombre de "paraguas".

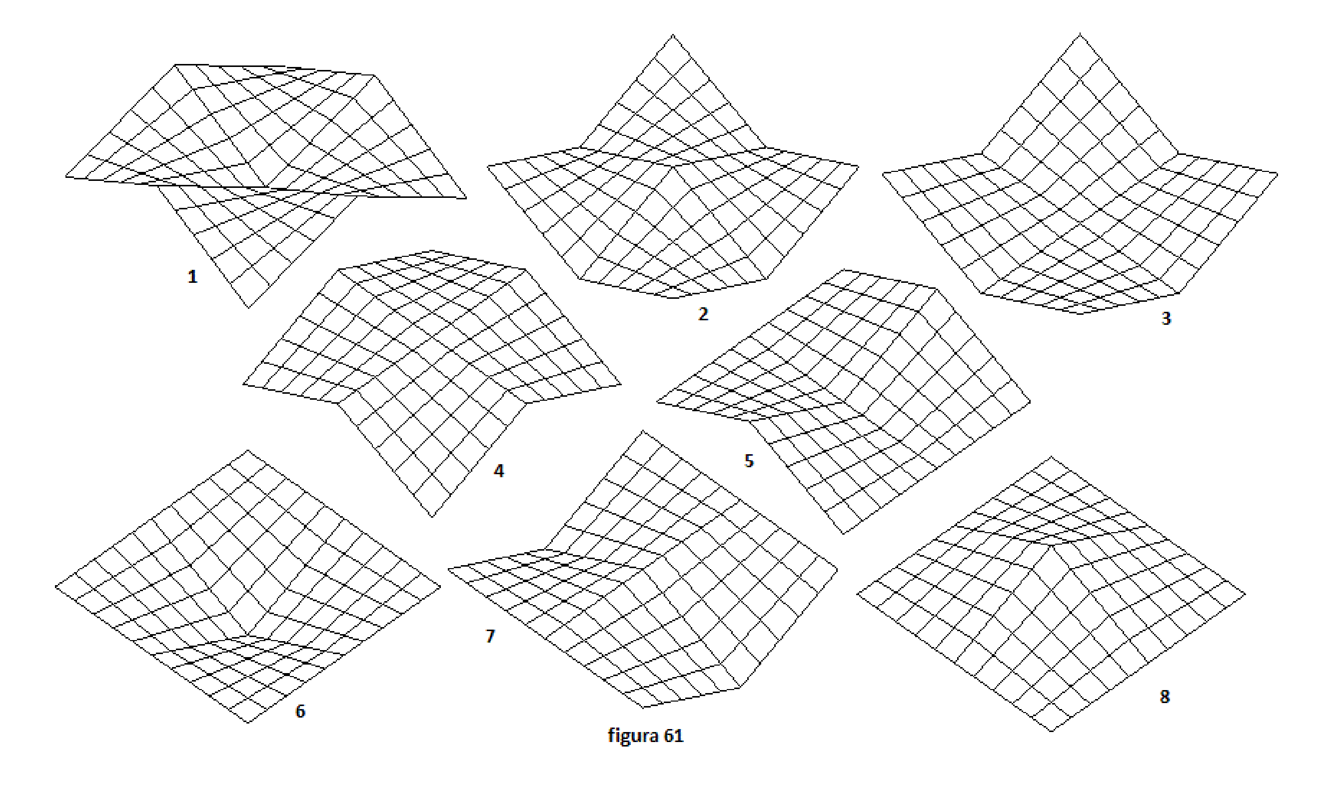


figura 61

El proyecto de Lavagnino se asimila a uno de los modelos de acoplamiento de cuatro hojas señalado con el número 2 en la figura 61. Una vez reconstruida la primera hoja con la técnica del cuadrilátero alabeado pueden obtenerse las otras parametrizaciones del acoplamiento por simetría. La hoja básica es la de bordes rectos que se proyecta a su vez sobre un cuadrado cuyo lado es la mitad del correspondiente al acoplamiento –figura 62–. Sin pretender realizar ningún ajuste de escala con el modelo construido, el resultado puede verse como suma, por ejemplo, de las parametrizaciones:

$$(v, u, 0, -0{,}5\,u + v\,(u - 0{,}5)) \quad , \quad (v, -u, 0{,}5 - 0{,}5\,u + v\,(u - 0{,}5)),$$
$$(-v, u, 0, -0{,}5\,u + v\,(u - 0{,}5)) \quad , \quad (-v, -u, 0{,}5 - 0{,}5\,u + v\,(u - 0{,}5)),$$

todas ellas extendidas en $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 1]$.

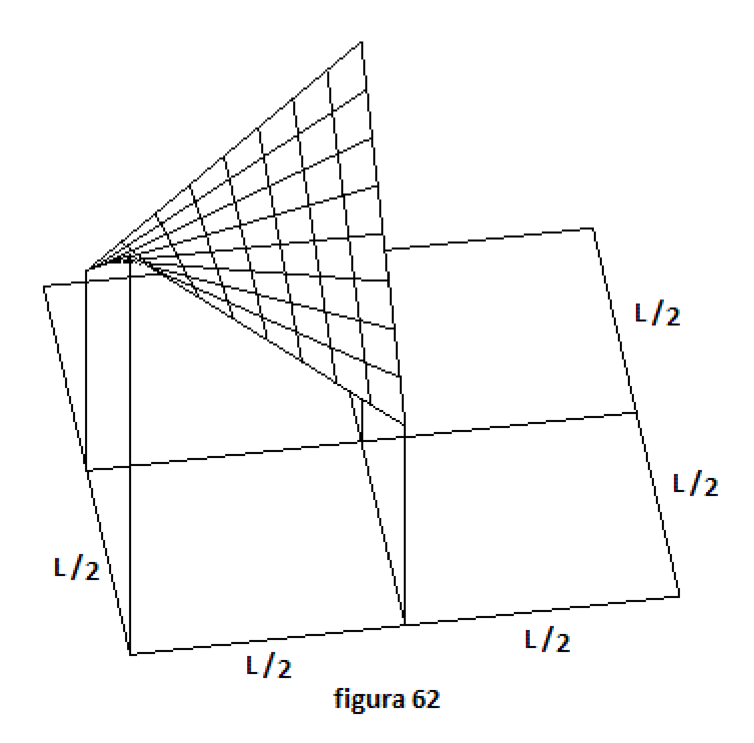


figura 62

Los cuatro paraboloides de la cubierta del pabellón de Lavagnino se proyectan sobre un cuadrado de algo menos de 15 m de lado (48 ft) y están sustentados por cuatro columnas exteriores que dejan diáfanos la superficie inferior en la que se ha diseñado una planta octogonal con muros formados por placas prefabricadas de hormigón y ventanales superiores de vidrio. La planta se articula y se compartimenta interiormente con paneles auto-portantes opacos, transparentes o traslúcidos –figura 63–.

Línea de proyección de la cubierta
Baño
Oficio
Sala de reunión
Archivo
Oficina salón principal
Estudio
PLANTA
CUBIERTA

figura 63

5.4.- Superficies de transición. Transiciones helicoidales. Transiciones entre plantas cuadradas.

Aparte de su interés por sí mismas, introducimos aquí las transiciones helicoidales sobre todo para su comparación con las realizadas con paraboloides hiperbólicos que es el tema que centra nuestro interés en este texto.

El problema de encontrar hojas de superficie curvadas que enlacen lateralmente polígonos planos isométricos situados en planos paralelos y uno de los cuales se encuentra girado relativamente un cierto ángulo respecto del otro ha sido investigado en diferentes objetos arquitectónicos y ornamentales a lo largo de décadas. Entre las superficies curvadas se destacan las regladas que permiten su "imitación" por estrechos planos que substituyen de forma discreta a las generatrices todo ello en mucha mayor medida a partir de la consolidación del hormigón armado con la posible formación de una infinidad de variantes de cofres con los mismos tablones. Aparte los enlaces de hojas planas, la solución más directa para una transición de este tipo es el simple movimiento helicoidal del polígono. En la figura 64 se muestra la vuelta completa de un recinto rectangular en el que sus superficies de transición son –trivialmente– hojas de helicoide recto.

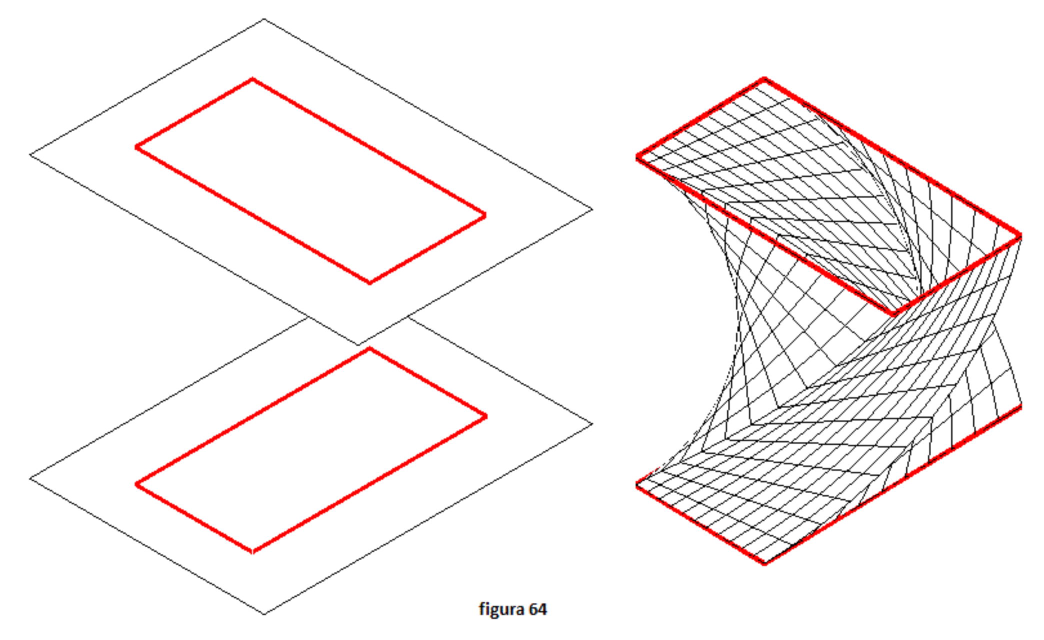


figura 64

Este interés por las transiciones helicoidales se ilustra de forma muy representativa en los diseños alternativos a las columnas clásicas que han ido sucesivamente apareciendo a lo largo de la historia. Lo "helicoidal" está en las columnas ofídicas o torsas y se manifiesta de forma evidente en las columnas salomónicas. Más próximo a nuestro tiempo las podemos encontrar, por ejemplo, en el modernismo de Gaudí del siglo pasado. Las ejecutadas por aparejo de ladrillos en el Colegio de las Teresianas de Barcelona –figura 65 a– son tal vez las más simples pero al mismo tiempo, desde nuestro punto de vista, las más interesantes de las diferentes columnas ensayadas por el arquitecto catalán. Considerando que "la sección" que gira y se desplaza es cuadrada, el tronco común útil de toda la columna es simplemente un cilindro de sección circular lo que hace que su utilidad estructural sea la de una columna cilíndrica –figura 65 b–.

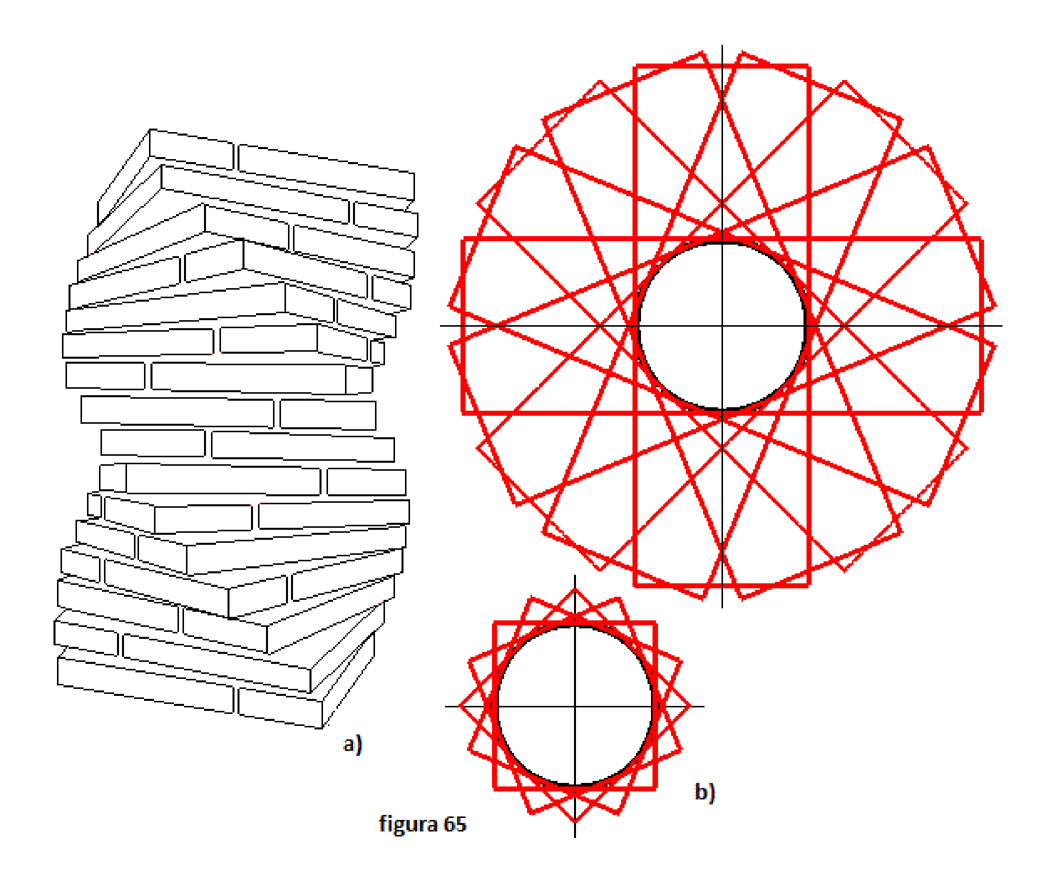


figura 65

Muy ligadas a este arquitecto y a su ambiente propio, las superficies de enlace helicoidales entre figuras planas diferentes en planos paralelos también son objeto de citas reiterativas. La columna llamada "de doble giro" considerada en determinados ambientes "un gran hallazgo" de este arquitecto modernista es otra de las alternativas a la columna tradicional en la que la sección parte de un polígono regular que se puede transformar de manera discreta en otros polígonos estrellados. Es consecuencia de la superposición de hojas helicoidales cuyas hélices tienen torsiones de distinto signo. El proceso impulsado por Gaudí dio lugar a complejas columnas donde predomina el efectismo y la escenografía y donde al final prevalece la pretendida complejidad substituyendo a la proporción estética. Todo ello bajo diversos pretextos como el de la supuesta adecuación estructural "natural". En la figura 66 se describen de forma simple estas transiciones "de doble giro" con el ejemplo de un paso desde un octógono estrellado a un cuadrado consecuencia de superponer los dos helicoides de sección cuadrada y ajustar convenientemente las alturas. Todo el trabajo de taller con vista a la construcción eficaz de estas columnas ha sido mixtificado. Siguiendo con el ejemplo de traza cuadrada, la propia columna "de doble giro" de transición de la figura 66 –un paso completo de las hojas de helicoide– entre un cuadrado en la base y un cuadrado idéntico en el capitel se presenta en la imagen 67 y es, desde el punto de vista puramente geométrico, una columna mucho más interesante que las ensayadas y construidas en su momento, pero probablemente a causa de la dificultad de su reconstrucción no parece haber estado en el centro de interés de estas exploraciones. No obstante, todos estos intentos abren una infinidad de posibilidades para formar transiciones rectas helicoidales entre secciones poligonales.

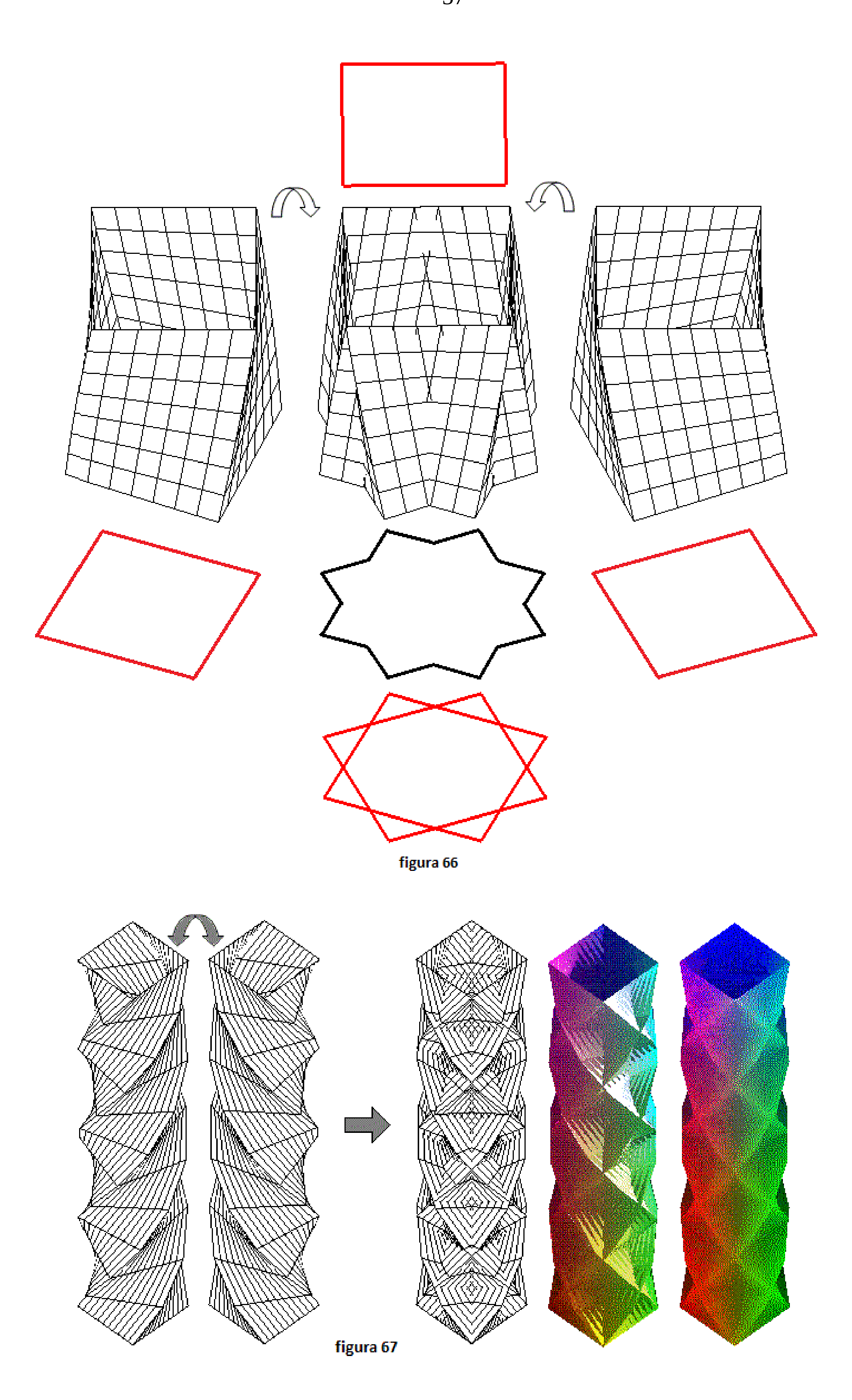


figura 66

figura 67

La exaltación de "lo helicoidal" la encontramos, finalmente, en el edificio "Turning Torso" de Malmoe en Suecia diseñado por Santiago Calatrava y terminado en 2004 que reproduce a escala gigantesca su propia escultura de cubos de 1991 con el mismo nombre –figura 68–. Es una edificación absolutamente delirante de 190 m de altura y 54 plantas donde las transiciones helicoidales se convierten en paredes de 9 "cubos", cada uno de los cuales contiene 6 plantas, que giran y se elevan a lo largo del edificio.

Finalmente un alarde que reproduce más exactamente la construcción discreta de un helicoide lo encontramos en el F & F Tower (antes Revolution-Tower) un edificio de oficinas con 52 plantas y casi 242,9 m hasta la altura del obelisco superior finalizado en 2011 cuyo esquema se reproduce asimismo en la figura 68 y en el que la parte principal de la torre resulta, aunque a escala gigantesca, algo parecido al sencillo pilar de ladrillo del Colegio de las Teresianas de la figura 65.

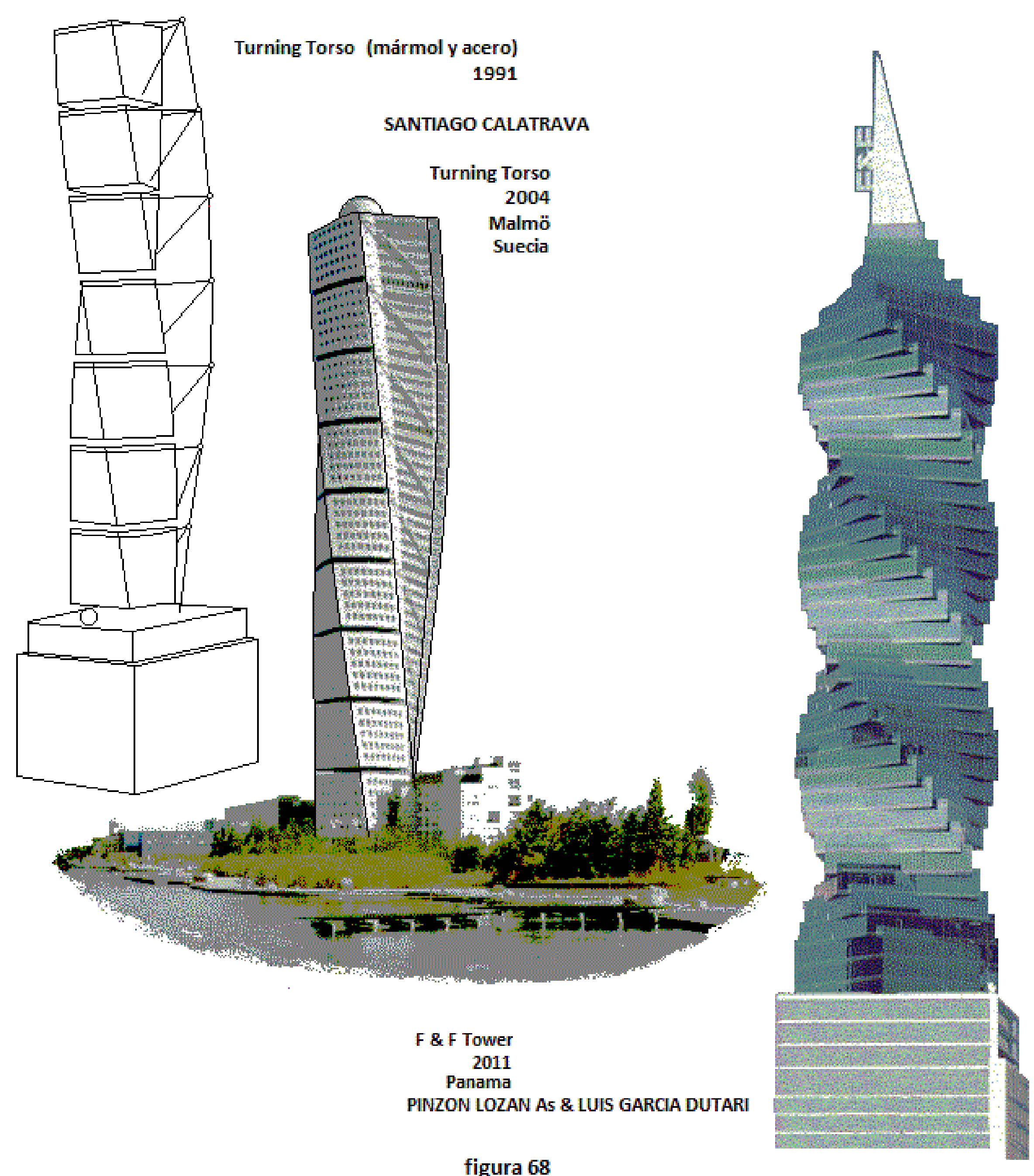


figura 68

5.5.- Los paraboloides hiperbólicos como elementos de transición. Plantas cuadradas. Nervi. Transiciones de hojas acopladas. Fisac.

Ya hemos resaltado en el **§ 5** las diferencias en la transición de rectas que se cruzan por la vía helicoidal o la alternativa del paraboloide hiperbólico. Esta misma diferencia puede ponerse de manifiesto en las transiciones de secciones poligonales entre las que tiene un tratamiento preferente la del cuadrado. En la figura 69 se compara el paso entre dos plantas cuadradas en planos paralelos giradas 45º una respecto de la otra realizadas con hojas helicoidales o de paraboloides hiperbólicos, esta últimas parametrizadas con el sistema de los cuadriláteros alabeados descrito en el **§ 3**.

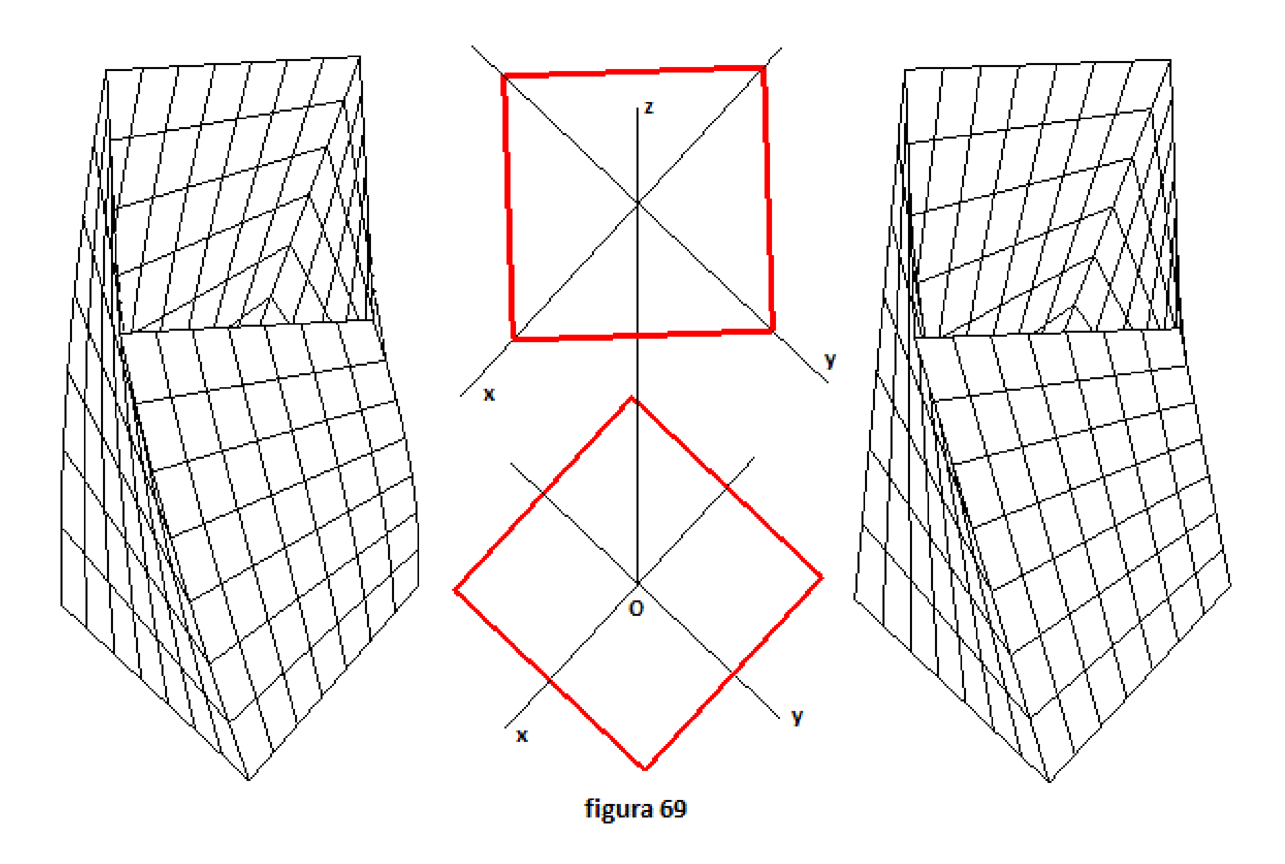


figura 69

Esta "torsión" de un cubo con hojas de paraboloide hiperbólico se manifiesta constructivamente de forma muy directa, por ejemplo, en el pabellón experimental "camera obscura" realizado en 2006 en el antiguo puerto de Trondheim, Noruega. Diseñado y construido por los estudiantes con la supervisión de varios profesores y arquitectos a través de la Norwegian University of Science and Technology fue realizado para experimentar sobre la construcción en madera y sobre los procesos de diseño digitales de industrialización y prefabricación. Se trata de una cámara formada en el interior de un "cubo rotado" sobre una planta cuadrada donde la cubierta está girada 45º con respecto a ella y las hojas laterales revestidas por tablas. En la figura 70 puede notarse la simplicidad de su génesis geométrica, su revestimiento y el resultado final.

Volviendo a las dos secciones rectangulares en planos paralelos una de las cuales está girada respecto de la otra 90 grados, podemos, trivialmente, resolver con caras planas una tal columna que las tengan por sección de base y por sección de capitel, respectivamente, como se muestra la figura 71. La alternativa que ahora estamos contemplando es resolver la transición con cuatro hojas de paraboloide hiperbólico como se presenta en la figura 72

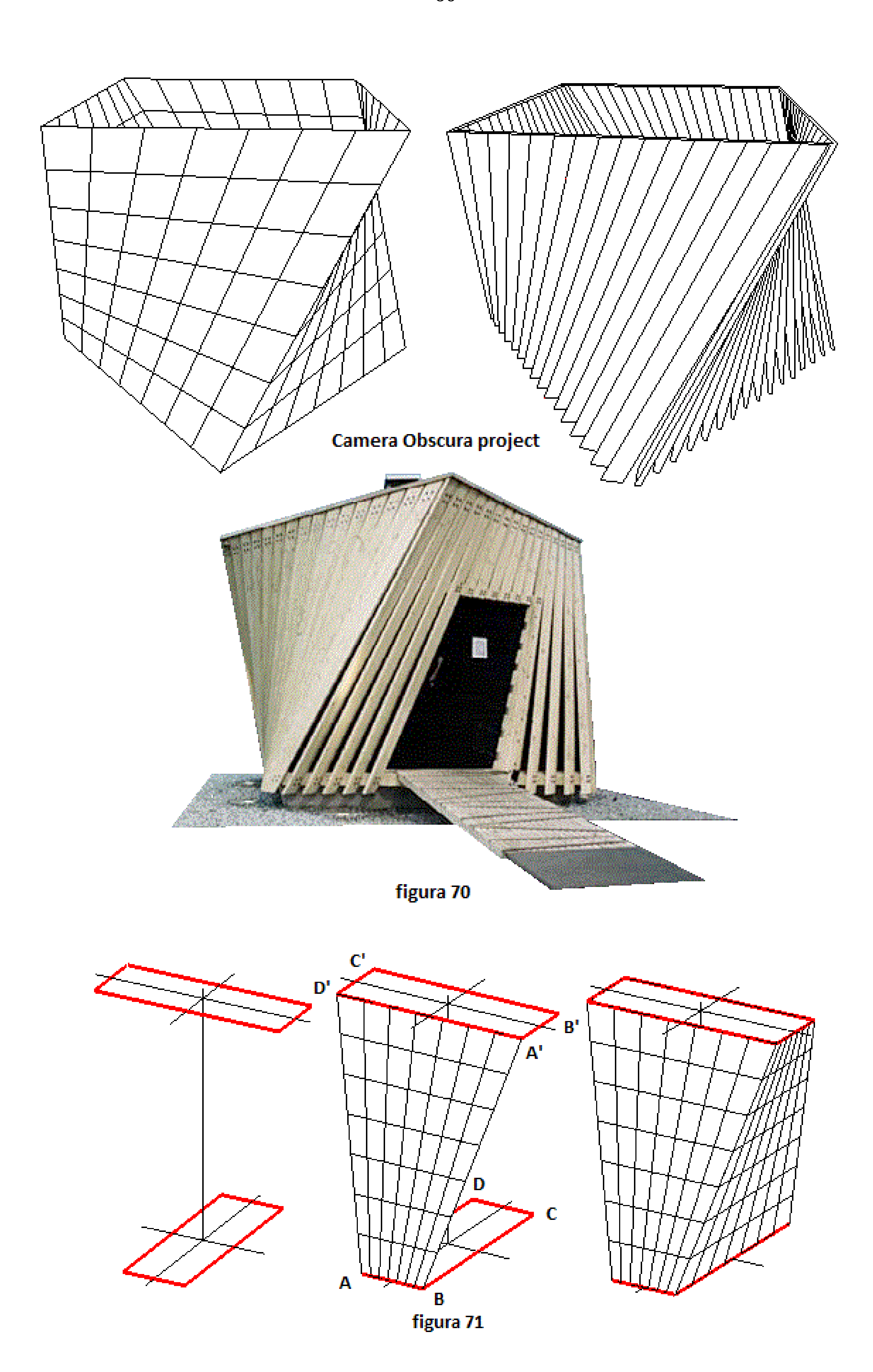


figura 70

figura 71

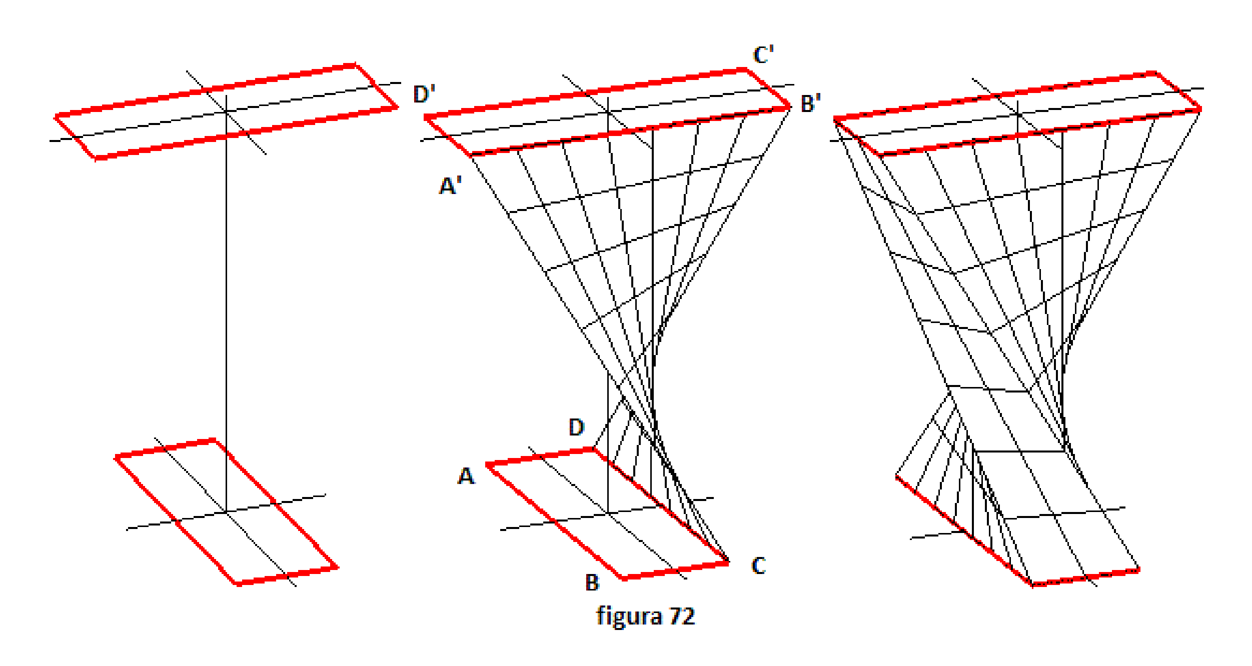


figura 72

En este contexto destacan los extraordinarios diseños del italiano Pier Luigi Nervi que muestran una manera distinta e innovadora de explorar la geometría en el campo de la construcción. Este ingeniero en edificación –y por lo tanto, arquitecto– ha sido indiscutiblemente en este terreno una de las figuras más destacada del siglo XX. Como ingeniero, proyectó y dirigió una gran variedad de importantes edificaciones monumentales que tienen su sello personal y en las que la geometría de las curvas y las superficies tienen un protagonismo notable. Limitándonos a algunas de sus columnas podemos mostrar el uso recurrente del paraboloide hiperbólico en sus transiciones entre la base y el capitel. En la figura 73 mostramos los esquemas generativos de las columnas de la estación de tren de Savona de 1961 y el edificio Aula de Audiencias Pontificias o "Sala Nervi" en Roma-Vaticano de 1971 junto al esquema de las columnas del Palacio de Deportes de Roma de 1959. Son ejemplos de maneras similares de tratar transiciones diversas con cuatro hojas de paraboloide y cuatro caras planas y donde las columnas pueden ser igualmente utilizadas intercambiando sus bases y capiteles. En el esquema superior de la figura 73 ambos extremos son la misma figura girada 90º, en el inferior la sección superior representada es otro rectángulo de distintas dimensiones. Ambas transiciones "estilo Nervi" son representativas de un grupo mucho más amplio de posibilidades. Obsérvese como el diseño suaviza el impacto visual brutal de la aparente torsión en la transición realizada directamente con cuatro hojas de paraboloide de la figura 72 introduciendo fragmentos triangulares o rectangulares de planos que restituyen en alguna medida el sentido clásico de la columna de sección constante. Transiciones muy representativas y características de Nervi son las que enlazan una planta rectangular o cuadrada y otra en cruz como en los pilares del viaducto Corso Francia en Roma de 1960. En la figura 74 se muestran estos esquemas para diferentes dimensiones relativas entre ambos extremos. La figura inferior representa, en esencia, la cubierta superior principal de la catedral Santa María de la Asunción de San Francisco que se ha mostrado en la figura 59. Otras exploraciones de Nervi utilizan conoides auxiliares diferentes del paraboloide hiperbólico como en el gigantesco pilar del Palacio del Trabajo de Turín. En todos estos casos Nervi convierte la geometría en arte estructural.

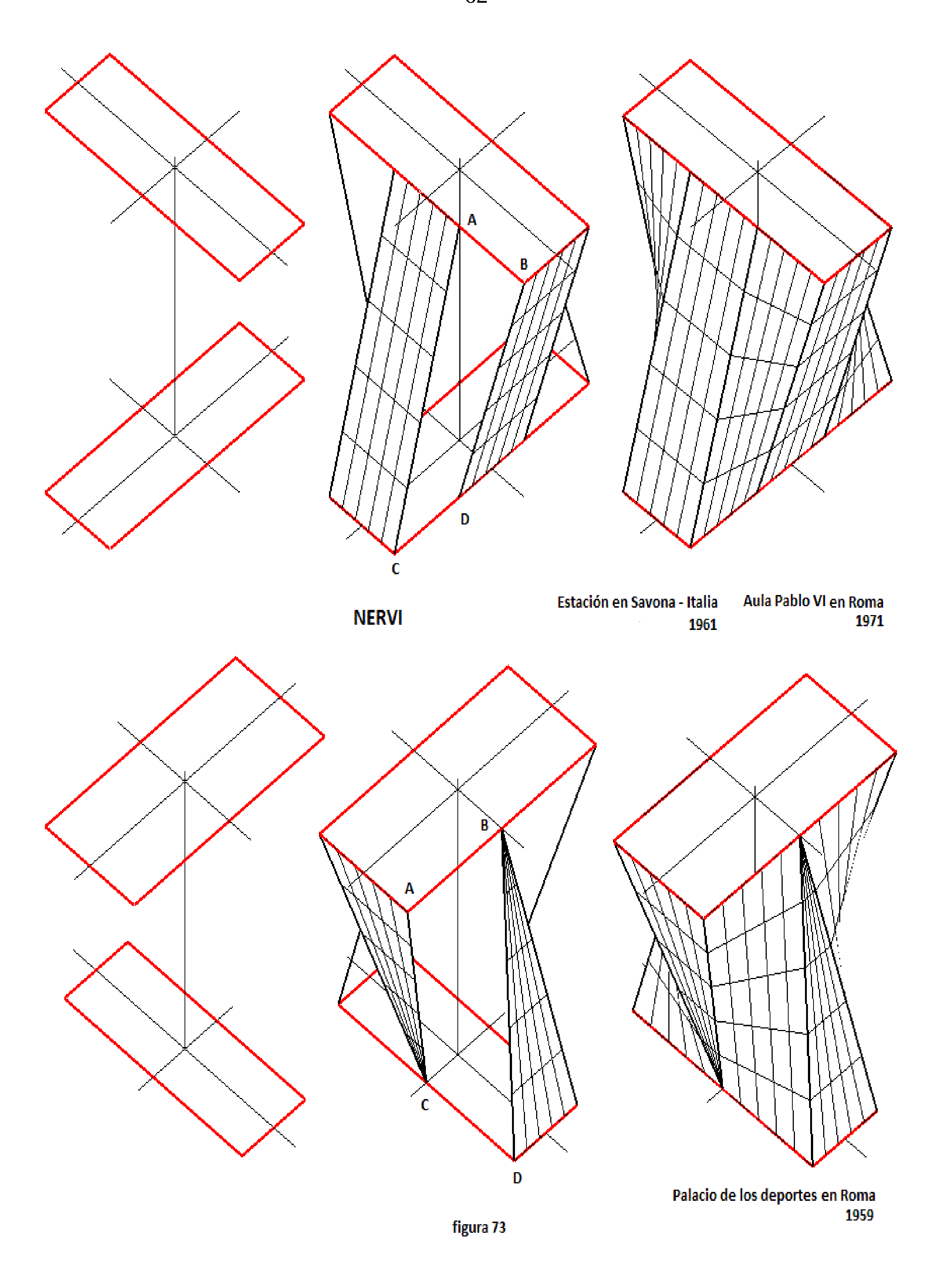

A
B
D
C
NERVI
Estación en Savona - Italia
1961
Aula Pablo VI en Roma
1971
B
A
C
D
Palacio de los deportes en Roma
1959

figura 73

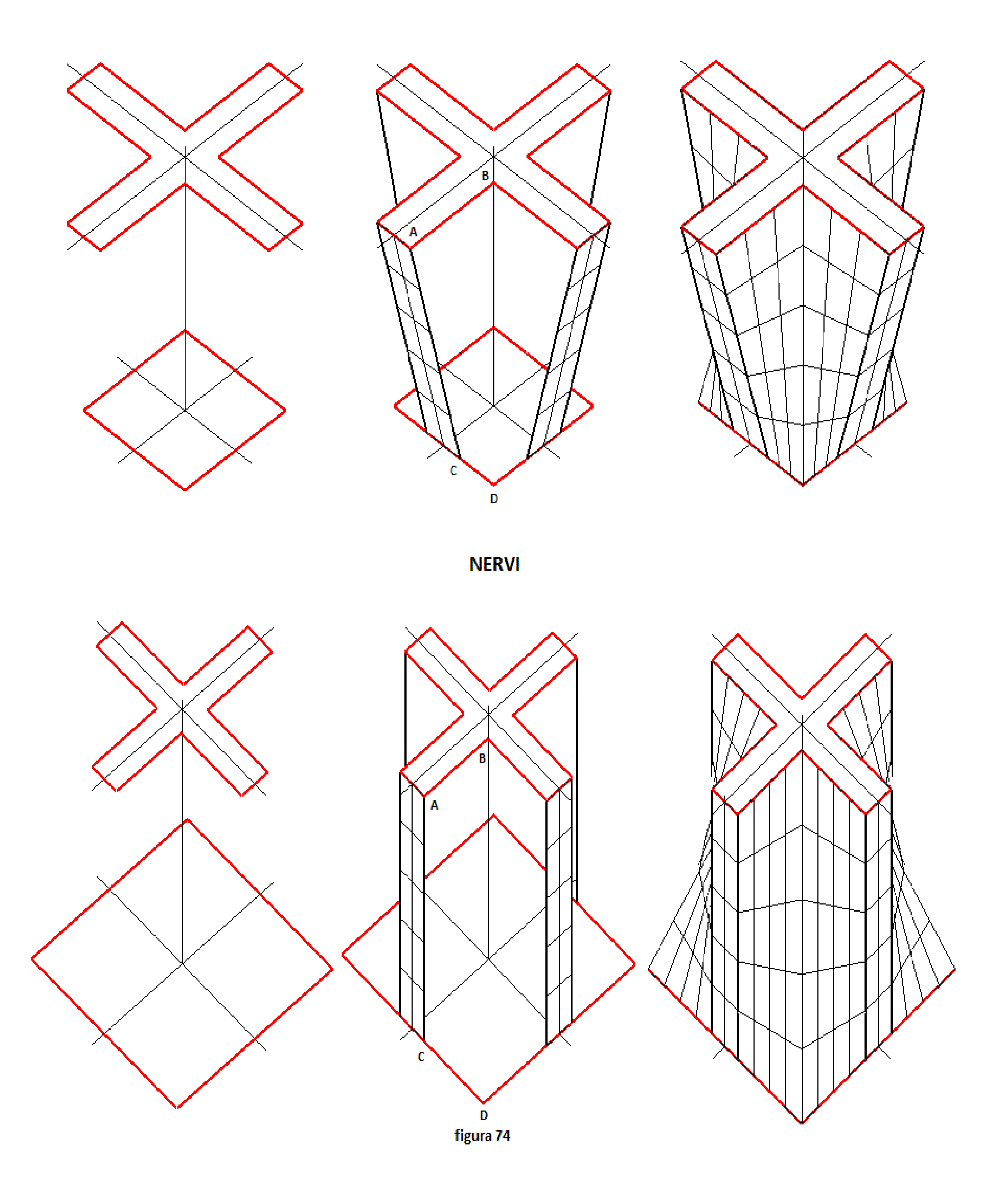


figura 74

En 1965 se le encarga al arquitecto Miguel Fisac Serna los "Laboratorios Jorba", un edificio para albergar los almacenes, oficinas y los propios laboratorios de la empresa en Madrid –figura 75–.

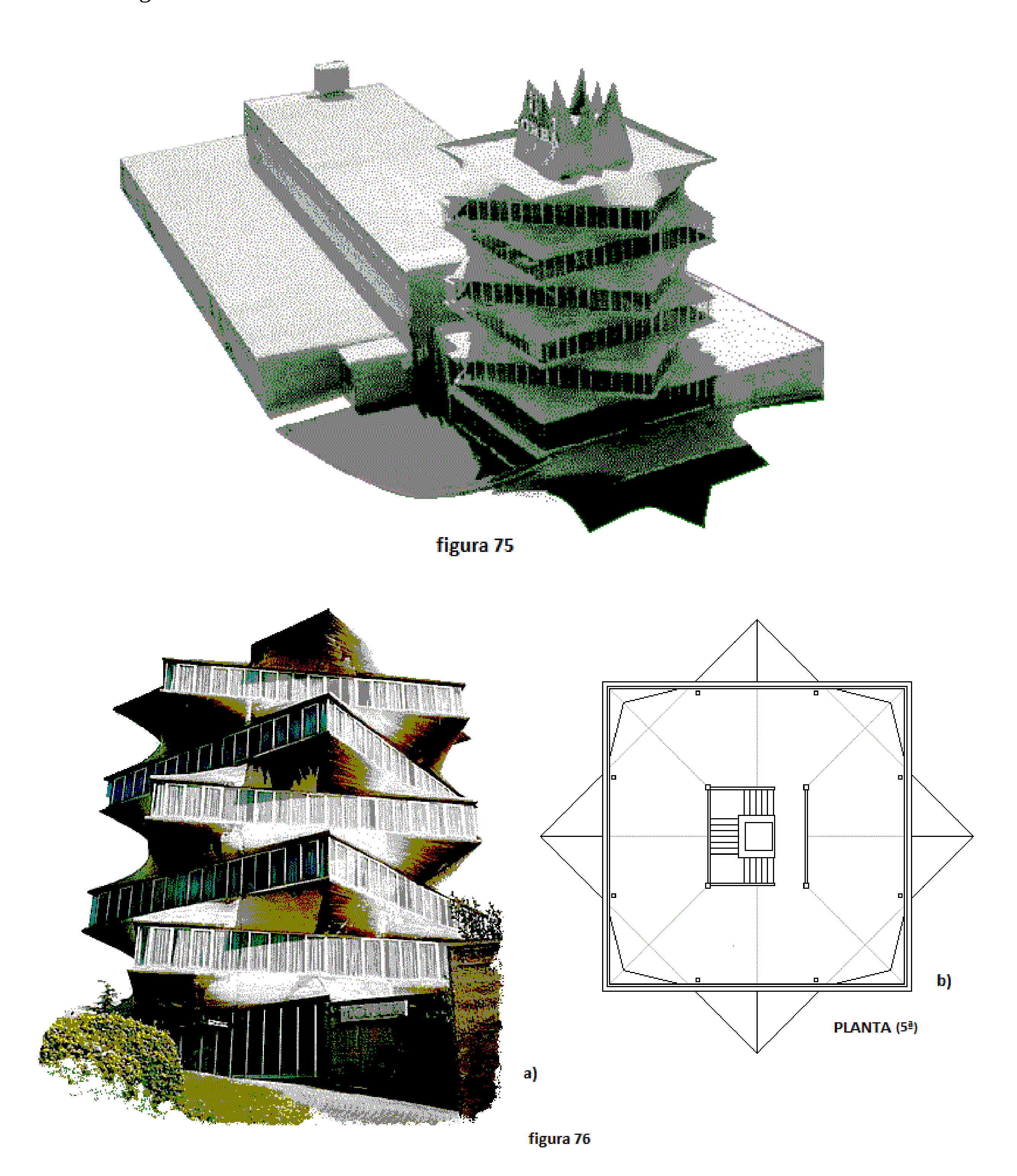


figura 75

figura 76

La torre de cinco plantas situada en el extremo más visible del edificio y la terminación de su cubierta es la que dio lugar al popular nombre de "La Pagoda" por la que era conocido el edificio antes –y después– de su sorprendente e injustificable demolición de

1999 –figura 76 a–. Caracterizado en su tiempo de "una frivolidad" por el propio arquitecto –probablemente para rebajar su carácter polémico y su valor icónico– fue, sin embargo, un interesantísimo edificio desde el punto de vista arquitectónico y artístico, totalmente congruente con los planteamientos iniciales del proyecto incluido su valor de exhibición publicitaria.

Todas las plantas de la torre formaban un cuadrado de 15 m de lado pero estaban giradas 45º cada una respecto de la anterior de manera que las plantas 1ª, 3ª y 5ª alineaban sus fachadas en tanto la 2ª, 4ª y 6ª alineaban con las anteriores sus diagonales. Dos de las plantas sucesivas superpuestas formarían un octógono estrellado y en las esquinas de sus vértices están los pilares metálicos de su estructura que se completan con los cuatro centrales que determinan el núcleo de accesos y distribución –figura 76 b)–.

La resolución del enlace entre las plantas giradas le llevó a Fisac a realizar una transición compuesta por el acoplamiento de ocho paraboloides hiperbólicos que permitían formar un cofre "flexible" con tablas horizontales. Una variante ingeniosa que muestra su gran conocimiento de las superficies regladas dentro del interés relevante y manifiesto de este gran arquitecto por la geometría. La génesis de la transición se representa sobre la figura 77 en la que se particulariza una de las hojas de paraboloide.

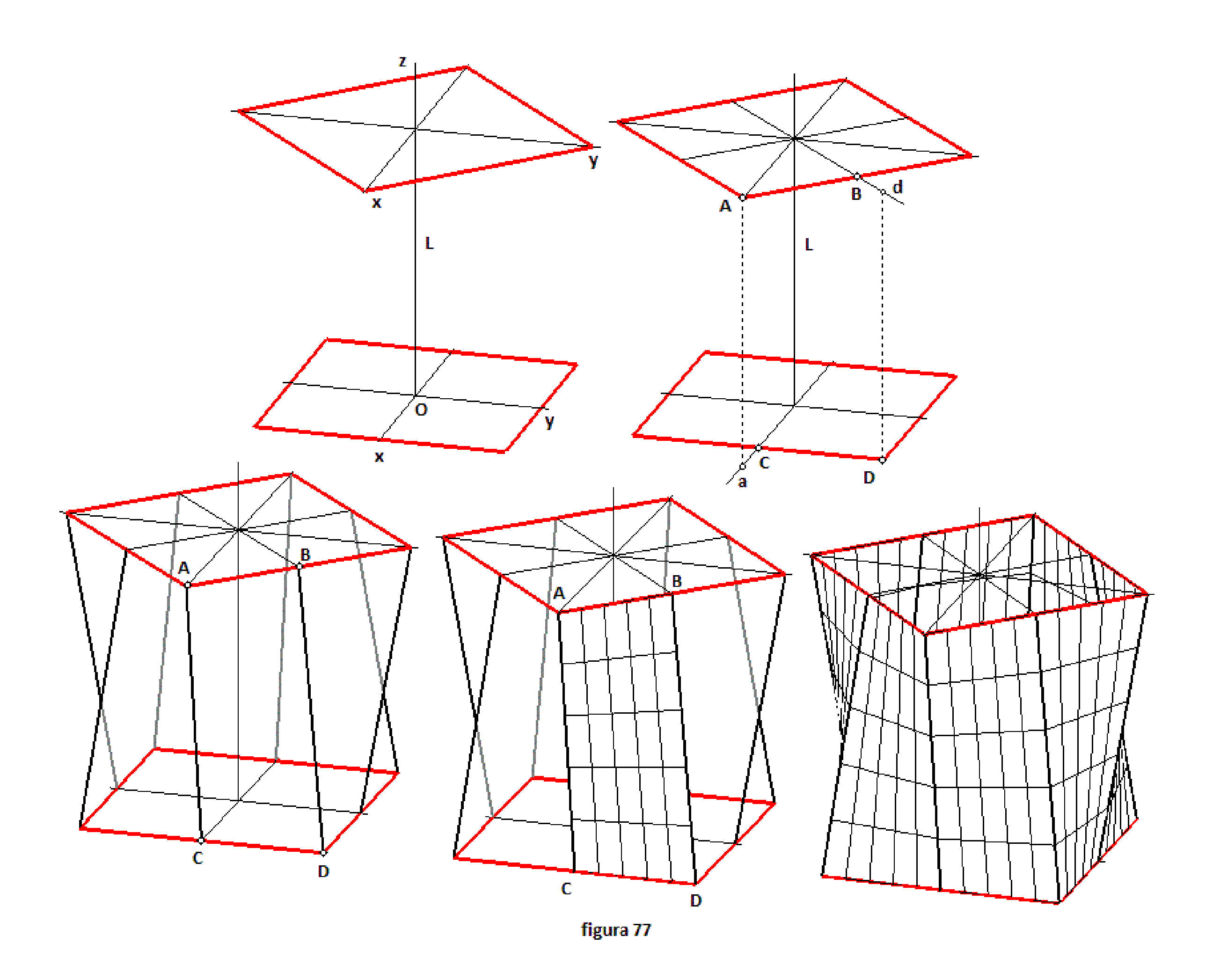


figura 77

Para una longitud "**L**" entre las secciones extremas y una longitud "**a**" del lado de la planta cuadrada, podemos tomar como directrices las rectas **AC** y **BD**, lo que es congruente con la construcción "física" de la superficie, en tanto las rectas **AB** y **CD** serán los bordes de la hoja. La directrices pueden representarse paramétricamente por:

$$\mathbf{AC} \equiv \left(\frac{a}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\lambda,\ 0,\ 2\,\lambda \right) \quad \text{y} \quad \mathbf{BD} \equiv \left(\frac{a}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\mu,\ \frac{a}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\mu,\ L\,\mu \right)$$

por lo que la dirección de las generatrices será la

$$\left\{ \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\mu - \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\lambda,\ \frac{a}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\mu,\ (\mu - \lambda)\, L \right\}$$

El producto vectorial de las direcciones que determinan los bordes es la dirección

$$\left\{ 0,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{8}\, a^2 \right\}$$

así que el producto escalar de ambas direcciones nos permite obtener que $\lambda = \mu$ y con esta relación podemos escribir la parametrización del paraboloide en la forma

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\mu,\ \frac{a}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\mu,\ L\,\mu \right) + v \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mu,\ \frac{a}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\, a\,\mu,\ 0 \right\}$$

y las hojas restantes pueden deducirse de esta por cuestiones de simetría.

En la figura 78 se representa el conjunto de las cinco plantas superiores de la torre realizado en base a la parametrización obtenida para unos valores **L= 1** y **a = 8** que tienden a aproximar "grosso modo" las dimensiones reales del edificio. En la misma figura se incluye otra representación que permite recordar mejor el modelo real.

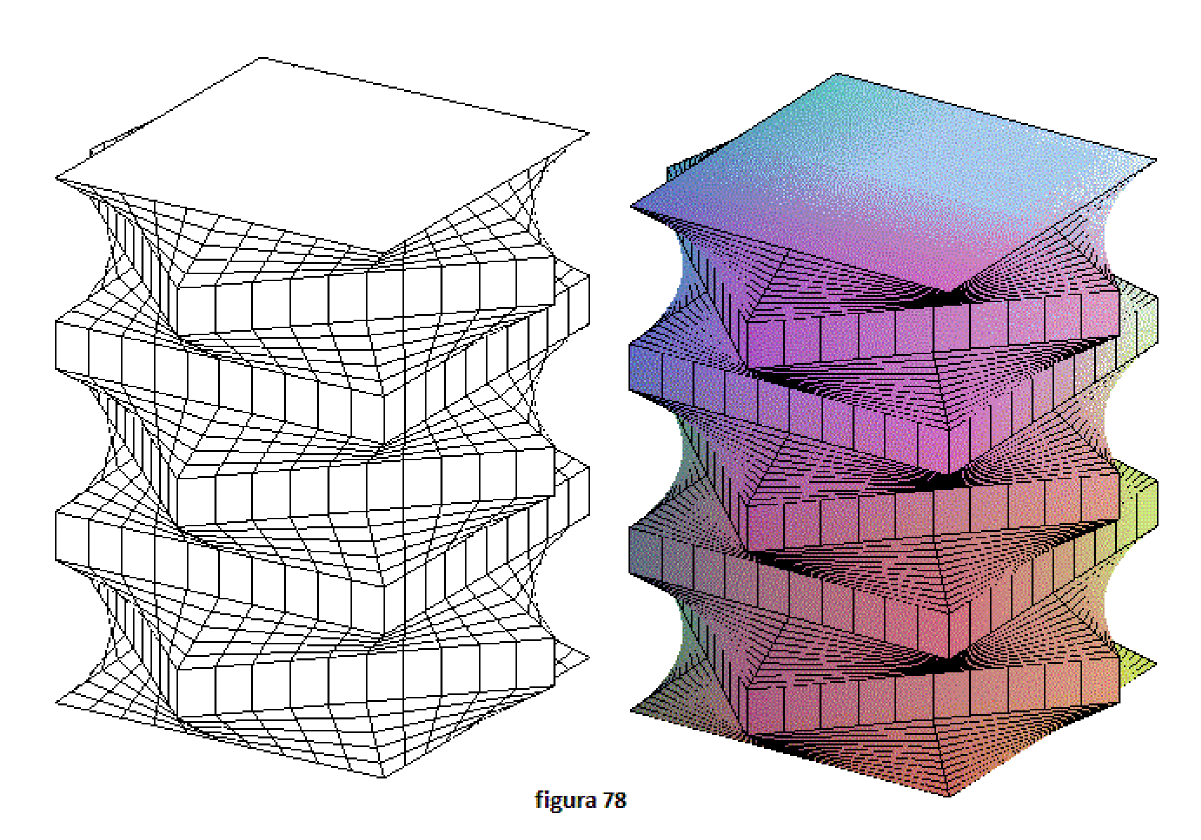
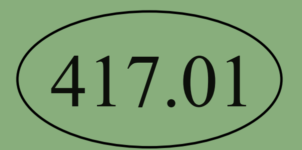


figura 78

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

